D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2022

Prof. M. Einsiedler

Prof. P. Biran

Musterlösung Serie 6

1. Entscheide und beweise, welche der folgenden Mengen sind linear unabhängig oder abhängig über $\mathbb{R}$ sind:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Lösung: Die Vektoren $v_1, \ldots v_4$ sind linear unabhängig genau dann, wenn das homogene lineare Gleichungssystem $x_1 v_1 + \cdots + x_4 v_4$ nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ hat. Durch Anwenden des Gaussverfahrens oder direktes ausprobieren erhält man die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dies zeigt, dass die Vektoren linear abhängig sind.

2. Sind die folgenden Mengen linear unabhängig über $\mathbb{R}$?

   (a) $\{(1,0,0), (0,2,t), (2,4,t^2)\}$ für ein t in $\mathbb{R}$;

   (b) Die Menge der Spalten einer oberen Dreiecksmatrix $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ mit $A_{ii} \neq 0$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$. Eine obere Dreiecksmatrix ist eine Matrix, deren Einträge unter der Diagonalen 0 sind. In anderen Worten eine Matrix $A = (A_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, sodass $A_{ij} = 0$ gilt, wenn $j < i$ ist.

   (c) $\{f, g\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, wobei $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ sind;

   (d) $\{f, g\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, wobei $f(x) = e^{rx}$ und $g(x) = e^{sx}$ für fixierte $s, r \in \mathbb{R}$ gilt.

Lösung:

(a) Wie in der ersten Aufgabe wenden wir das Gaußsche Eliminationsverfahren auf die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & t & t^2 \end{pmatrix}$$

an, um die Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems zu finden

$$A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wenn $t^2 - 2t \neq 0$ ist, oder in andern Worten $t \notin \{0, 2\}$, transformiert die Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also sind die Vektoren dann linear unabhängig.
Wenn aber $t \in \{0, 2\}$ ist, erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ t^2 \end{pmatrix} = 2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ t \end{pmatrix} \right]$$

(b) Seien $v_1, \dots, v_n$ die Spalten von A, und seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Sei $v := \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. Eine Induktion zeigt, dass für den k-ten Eintrag $v^{(k)}$ von v gilt

$$v^{(k)} = \sum_{i=k}^{n} \alpha_i A_{ki}$$

Falls $n = 1$, dann ist nichts zu zeigen. Sei die Aussage also wahr für jede obere Dreiecksmatrix $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Sei $N := n + 1$ und $A \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ eine obere Dreiecksmatrix. Dann existiert ein $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, ein Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ so dass

$$A = \begin{pmatrix} B & u \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Seien $w_1, \dots, w_n$ die Spaltenvektoren von $B, v_1, \dots, v_N$ die Spaltenvektoren von A, und sei $v := \sum_{k=1}^{N} \alpha_k v_k$. Sei $1 \leqslant k \leqslant n$, dann gilt für den k-ten Eintrag $v^{(k)}$ von v

$$\begin{aligned} v^{(k)} &= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i v_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i^{(k)} + \alpha_N u^{(k)} = \sum_{i=k}^{n} \alpha_i B_{ki} + \alpha_N u^{(k)} \\ &= \sum_{i=k}^{n} \alpha_i A_{ki} + \alpha_N A_{kN} = \sum_{i=k}^{N} \alpha_i A_{ki} \end{aligned}$$

ß Es gilt $v^{(N)} = \alpha_N A_{NN} = \sum_{k=N}^{N} \alpha_k A_{Nk}$ und folglich ist die Formel bewiesen. Nehmen wir also an, dass $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine obere Dreiecksmatrix ist, mit $A_{ii} \neq 0$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$. Seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ die Spalten von A und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ so dass $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$, also $0 = \sum_{i=k}^{n} \alpha_i A_{ik}$ für alle $1 \leqslant k \leqslant n$. Insbesondere gilt $0 = \alpha_n A_{nn}$, und aus $A_{nn} \neq 0$ folgt $\alpha_n = 0$. Sei $1 \leqslant k < n$ und seien $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0$. Dann gilt nach Annahme $0 = \sum_{i=k}^{n} \alpha_i A_{ki} = \alpha_k A_{kk}$ und folglich $\alpha_k = 0$. Es folgt also $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ und folglich sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig.

(c) Nehme an, dass $a, b \in \mathbb{R}$ existieren, nicht beide 0, sodass

$$a\cos(x) + b\sin(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Wenn $a = 0$ oder $b = 0$ ist, erhalten wir direkt einen Widerspruch, da weder sin noch cos die konstante Nullfunktion sind. Also können wir annehmen, dass $b \neq 0 \neq a$. Wir erhalten dann

$$-\frac{a}{b}\cos(x) = \sin(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Für $x = 0$ muss dann $-\frac{a}{b} = 0$ sein, was auch ein Widerspruch ist. Also ist die Menge linear unabhängig über $\mathbb{R}$.

(d) Angenommen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha e^{sx} + \beta e^{rx} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das gilt genau dann, wenn $\alpha e^{(s-r)x} = -\beta$. Folglich ist entweder $a = b = 0$, oder $e^{(r-s)x}$ ist konstant. Letzteres gilt nur dann, wenn $r = s$. Daher ist $\{f, g\}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$, wenn $r \neq s$, d.h. wenn $f \neq g$.

3. Seien $A_1, A_2 \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\{A_1, A_2\}$ linear unabhängig ist.

(b) Sei

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \mid d = e = 0, b - a = f, 3a = c \right\}$$

Beweisen Sie, dass $\mathrm{Sp}(A_1, A_2) = M$.

(c) Finden Sie $A_3 \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ so dass $\{A_1, A_2, A_3\}$ linear unabhängig ist. Gilt $\mathrm{Sp}(A_1, A_2, A_3) = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ für jedes diese Bedingung erfüllende A_3?

Lösung:

(a) Angenommen A_1, A_2 sind linear abhängig. Dann existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ nicht alle 0, so dass

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha + \beta & 3\alpha \\ 0 & 0 & \alpha + \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also gilt $\alpha = \beta = 0$ und folglich sind A_1, A_2 linear unabhängig.

(b) Aus der Rechnung in Teil 2.a) folgt, dass $\langle A_1, A_2 \rangle \subseteq M$. Wir müssen also nur zeigen, dass $M \subseteq \langle A_1, A_2 \rangle$, d.h. dass jede Matrix $B \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ der Form

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

mit $b - a = f$ und $3a = c$ in $\langle A_1, A_2 \rangle$ enthalten ist. Wir zeigen $B = aA_1 + (f-a)A_2$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & a+f & 3a \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 2a & 3a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & f-a & 0 \\ 0 & 0 & f-a \end{pmatrix} \\ &= aA_1 + (f-a)A_2 \end{aligned}$$

(c) Sei

$$A_3 := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix},$$

Für jede nicht triviale Linearkombination

$$L = \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3, \text{ with } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$$

ist der untere Linke Eintrag von L gleich γc_{21} und deswegen nicht 0, wenn wir A_3 so wählen, dass $c_{21} \neq 0$. Sei also

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit dieser Wahl von A_3 folgt $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle \neq M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, da der mittlere Eintrag der zweiten Zeile einer Matrix in diesem Untervektorraum 0 sein muss.

Jetzt sei $A_3 \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ irgendeine Matrix, sodass $\{A_1, A_2, A_3\}$ linear unabhängig sind. Betrachte eine Linearkombination

$$L = \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3, \text{ with } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Erneut die obige Notation für die Einträge von A_3 benutzend und $L = (l_{ij})_{1\leqslant i\leqslant 2,\, 1\leqslant j\leqslant 3}$ schreibend erhalten wir

$$\begin{cases} \alpha + \gamma c_{11} &= l_{11} \\ 2\alpha + \beta + \gamma c_{12} &= l_{12} \end{cases}$$

4. Zeigen Sie, dass

$$U = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{F}_5, \mathbb{F}_5) \mid \sum_{i=0}^{4} f(\bar{i}) = 0\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{F}_5, \mathbb{F}_5)$$

ein Untervektorraum ist. Bestimmen Sie eine Basis von U.

Lösung: Wir fassen den Körper $\mathbb{F}_5$ auf als

$$\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}.$$

Die Nullfunktion ist das Nullelement in $\mathrm{Abb}(\mathbb{F}_5, \mathbb{F}_5)$ und ist offenbar in U enthalten. Des Weiteren gilt für $f, g \in U$ und $\lambda \in \mathbb{F}_5$:

$$\sum_{i=0}^{4}(f + \lambda g)(\bar{i}) = \sum_{i=0}^{4} f(\bar{i}) + \lambda \sum_{i=0}^{4} g(\bar{i}) = 0$$

und daher $f + \lambda g \in U$. Alternativ kann man auch direkt sagen, dass U die Lösungsmenge einer homogenen linearen Gleichung ist und daher ein Untervektorraum.

Wir bestimmen nun eine Basis von U. Für $i = 1, 2, 3, 4$ betrachten wir die Abbildung

$$f_i(\bar{j}) = \begin{cases} \overline{4}, j = 0 \\ \overline{1}, j = i \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Erinnerung: Hierbei ist natürlich $\overline{4} = -\overline{1}$ in $\mathbb{F}_5$ und somit $f_i \in U$. Wir zeigen, dass die Abbildungen f_i linear unabhängig sind. Seien hierzu $\lambda_i \in \mathbb{F}_5$, so dass

$$\sum \lambda_i f_i = 0.$$

Wir zeigen, dass die Abbildungen f_i linear unabhängig sind. Seien hierzu $\lambda_i \in \mathbb{F}_5$, so dass

$$\sum \lambda_i f_i = 0.$$

Für $j = 1, 2, 3, 4$ ist dann aber

$$0 = \left(\sum \lambda_i f_i\right)(\bar{j}) = \lambda_j f_j(\bar{j}) = \lambda_j.$$

Wir zeigen, dass U von den Abbildungen f_i erzeugt wird. Sei hierzu $f \in U$ und definiere g als Linearkombination wie folgt:

$$g = f(\overline{1})f_1 + f(\overline{2})f_2 + f(\overline{3})f_3 + f(\overline{4})f_4.$$

Dann gilt für $i = 1, 2, 3, 4$:

$$g(\bar{i}) = f(\bar{i})f_i(\bar{i}) = f(\bar{i}).$$

Da $f \in U$ gilt außerdem

$$f(\overline{0}) = -\left(\sum_{i=1}^{4} f(\bar{i})\right) = \sum_{i=1}^{4} f(\bar{i}) \cdot \overline{4} = g(\overline{0}),$$

und somit $f = g$.

5. Sei V ein Vektorraum über einen beliebigen Körper K, sodass V eine abzählbare Basis besitzt. Zeige, dass jede linear unabhängige Menge $S \subseteq V$ abzählbar oder endlich ist.

   Solution: Sei $\{v_n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$ eine Basis von V und S eine linear unabhängige Teilmenge von V. Wir schreiben

$$V_i := \mathrm{Sp}(v_1, v_2, \ldots, v_i) \quad \text{and} \quad S_i := S \cap V_i = \{v \in S \mid v \in V_i\}.$$

   Jetzt ist

$$V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \quad \text{and} \quad S = S \cap V = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i.$$

   Da $\{v_i\}$ eine Basis von V ist, ist i die maximale Grösse einer linear unabhängigen Teilmenge von V_i. Da alle S_i linear unabhängig sind gilt

$$|S_i| \leqslant i, \, \forall i \in \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

   Demnach ist S eine abzählbare Vereinigung endlicher Mengen und somit abzählbar.

6. Zeige, dass die Funktionen

$$\varphi_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{a + x}$$

   für $a \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ linear unabhängig sind.

   Hinweis: Verwende, dass ein von Null verschiedenes Polynom nur endlich viele Nullstellen hat.

   Lösung: Betrachte endlich viele $\alpha_i \in \mathbb{R}$ sowie paarweise verschiedene $a_i \in \mathbb{R}_{\geqslant}0$ mit $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_{a_i} = 0$. Für alle $x \in \mathbb{R}^{>0}$ gilt dann

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \frac{1}{a_i + x} = 0.$$

   Durch Multiplikation mit $\prod_{i=1}^{m} (a_i + x)$ ergibt sich daraus

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \prod_{j \neq i} (a_j + x) = 0$$

   Hier ist die linke Seite ein Polynom in x, also folgt aus dem Hinweis, dass dieselbe Gleichung schon für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Insbesondere gilt die Gleichung auch für $x = -a_k$ für jedes $1 \leqslant k \leqslant m$. Für alle $i \neq k$ ist aber $\prod_{j \neq i} (a_j - a_k) = 0$; somit reduziert sich die Gleichung dann zu

$$\alpha_k \cdot \prod_{j \neq k} (a_j - a_k) = 0.$$

Da die a_i paarweise verschieden sind, ist $\prod_{j\neq k}(a_j - a_k) \neq 0$ und deshalb $\alpha_k = 0$. Da k beliebig war, schliessen wir $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$. Also sind $\{\varphi_a \mid a \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}\}$ linear unabhängig.

Multiple Choice Fragen. Es kann jeweils mehr als eine Antwort korrekt sein.

Frage 1. Sei V ein Vektorraum über K. Welche der folgenden Aussagen sind richtig ?

✓ Sei $v \in V$, dann ist die Menge

$$W := \{w \in V \mid \exists \lambda \in K : w = \lambda v\}$$

ein Unterraum von V.
Begründung: Wir sehen, dass diese Menge geschrieben werden kann als

$$\mathrm{Sp}(v) = \{\lambda v \mid \lambda \in K\},$$

was bei Definition ein Untervektorraum von V ist. Alternativ können wir es auch direkt überprüfen, es gilt: $0_V = 0 \cdot v$ und für $w, w' \in W$ mit $w = \lambda v$, $w' = \lambda' v$ und beliebige $\mu, \mu' \in K$, gilt

$$\mu w + \mu' w' = \mu\lambda v + \mu'\lambda' v = (\mu\lambda + \mu'\lambda')v.$$

Also ist $\mu w + \mu' w' \in W$.

✓ Eine Teilmenge $W \subset V$ ist genau dann ein Unterraum, wenn $\mathrm{Sp}(W) = W$.
Begründung: Wenn W ein Unterraum ist, muss $\mathrm{Sp}(W) = W$ sein, da Unterräume unter Linearkombinationen abgeschlossen sind. Auf der anderen Seite ist $\mathrm{Sp}(W)$ für jede Menge ein Untervektorraum, also folgt aus $\mathrm{Sp}(W) = W$, dass W ein Untervektorraum ist.

✓ Seien $S_1, S_2 \subset V$ Teilmengen. Dann gilt $\mathrm{Sp}(S_1 \cup S_2) = \mathrm{Sp}(S_1) + \mathrm{Sp}(S_2)$.
Begründung: Die Inklusion von links nach rechts: für $i = 1, 2$ gilt $S_i \subseteq \mathrm{Sp}(S_i) \subseteq \mathrm{Sp}(S_1) + \mathrm{Sp}(S_2)$. Also ist $S_1 \cup S_2 \subseteq \mathrm{Sp}(S_1) + \mathrm{Sp}(S_2)$. Da $\mathrm{Sp}(S_1) + \mathrm{Sp}(S_2)$ ein Untervektorraum ist, erhalten wir $\mathrm{Sp}(S_1 \cup S_2) \subseteq \mathrm{Sp}(S_1) + \mathrm{Sp}(S_2)$.
Inklusion von rechts nach links: aus $S_i \subseteq S_1 \cup S_2$ folgt $\mathrm{Sp}(S_i) \subseteq \mathrm{Sp}(S_1 \cup S_2)$ für $i = 1, 2$. Da $\mathrm{Sp}(S_1 \cup S_2)$ ein Untervektorraum ist, enthält es die Sume jeder zwei Elemente, also ist $\mathrm{Sp}(S_1) + \mathrm{Sp}(S_2) \subseteq \mathrm{Sp}(S_1 \cup S_2)$.

✓ Seien $S_1, S_2 \subset V$ Teilmengen. Dann gilt $\mathrm{Sp}(S_1 \cap S_2) \subseteq \mathrm{Sp}(S_1) \cap \mathrm{Sp}(S_2)$.
Begründung: Es gilt $S_1 \cap S_2 \subseteq S_i \subseteq \mathrm{Sp}(S_i)$ für $i = 1, 2$. Also ist

$$S_1 \cap S_2 \subseteq \mathrm{Sp}(S_1) \cap \mathrm{Sp}(S_2).$$

Da der Schnitt von zwei Untervektorräumen wieder ein Untervektorraum its, ist die rechte Seite des obigen Ausdrucks ein UVR. Aus der Minimalität des Spans folgt $\mathrm{Sp}(S_1 \cap S_2) \subseteq \mathrm{Sp}(S_1) \cap \mathrm{Sp}(S_2)$.

Frage 2. Sei V ein Vektorraum und betrachte $S_1, S_2 \subseteq V$ mit $S_1 \subsetneq S_2$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Wenn S_1 linear unabhängig ist, dann ist S_2 wann ebenfalls linear unabhängig?

- ○ Immer
- ○ Nie
- ✓ Manchmal

  Begründung: Betrachte den Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ und sei

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

  Dann ist S_2 linear abhängig. Das Komplement von $(1, 1)$ in S_2 ist aber linear unabhängig.

Wenn andererseits S_2 linear unabhängig ist, dann ist S_1 wann ebenfalls linear unabhängig?

- ✓ Immer
- ○ Nie
- ○ Manchmal

Begründung: Wenn eine nicht triviale Linearkombination von Vektoren in S_1 den Nullvektorergibt, dann zeigt die selbe Linearkombination, dass S_2 linear abhängig ist, da $S_1 \subsetneq S_2$.

(b) Beantworte die vorherige Frage erneut, wobei "linear unabhängig" durch "Erzeugendensystem von V" wird.

Antowrt: Wenn V von S_1 erzeugt wird, dann ist S_2 **immer** eine erzeugende Teilmenge von V. Tatsächlich ist

$$V \supseteq \mathrm{Sp}(S_2) \supseteq \mathrm{Sp}(S_1) = V.$$

Wenn V von S_2 erzeugt wird, dann ist S_1 **manchmal** eine erzeugende Teilmenge von V. Sei zum Beispiel $V = \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ und sei

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dann ist S_1 ebenfalls eine erzeugende Teilmenge von V. Wenn wir aber einen weiteren Vektor entfernen, ist die übrige Menge nicht mehr erzeugend.

(c) Beantworte die vorherige Frage erneut, wobei "linear unabhängig" durch "Basis von V" wird. *Antowrt:* Wenn S_1 eine Basis von V ist, dann ist S_2 **nie** eine Basis von V, da sie nicht mehr linear unabhängig ist.

Wenn S_2 eine Basis von V ist, dann ist S_1 **nie** eine Basis von V, da sie V nicht mehr erzeugt.