Musterlösung Serie 7

1. Berechne die Dimension und gebe eine Basis der folgenden Vektorräume an.

   (a) Der Untervektorraum der oberen Dreiecksmatrizen in $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ (diese haben wir in Aufgabe 2. b) der 6. Serie definiert);

   (b) Der Untervektorraum der Diagonalmatrizen in $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$. Diagonalmatrizen sind der Form $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = 0$ immer wenn $i \neq j$;

   (c) Der Vektorraum der symmetrischen Matrizen
   $$W = \left\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A^T = A\right\},$$
   wobei $\cdot^T$ für die Operation $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mapsto (a_{ji})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ steht;

   (d) Der Vektorraum jener Matrizen $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F}_2)$, sodass die Summe der Zeilen von A der Nullvektor ist.

Lösung:

(a) Für eine oberere Dreiecksmatrix $A = (a_{ij})$ gilt $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$. Sei nun $A_{ij} = (b_{kl})$ für alle $1 \leqslant i,j \leqslant n$ sodass $i \leqslant j$ die Matrix, sodass $b_{ij} = 1$ und alle Einträge 0 sind. Die Menge
$$S := \{A_{ij} \mid 1 \leqslant i,j \leqslant n \wedge i \leqslant j\}$$
ist linear unabhängig, da die Matrizen ihren nicht-trivialen Eintrag alle an verschiedenen Stellen haben. Außerdem erzeugt S den Untervektorraum der oberen Dreiecksmatrizen und ist somit eine Basis. Die Kardinalität von S ist
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(b) Betrachte für jedes $1 \leqslant i \leqslant n$ die Matrix A_i, deren Einträge alle 0 sind, ausser der Eintrag an der Stelle i,i, der den Wert 1 hat. Dann ist $\{A_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ linear unabhängig und erzeugt den UVR der Diagonalmatrizen. Also ist es eine Basis für diesen Raum und hat Kardinalität n.

(c) Betrachte für jedes $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ die Matrix $A_{ij} = (b_{kl})$, für die $b_{ij} = 1 = b_{ji}$ und alle anderen Einträge 0 sind. Die Menge $S := \{A_{ij} \mid 1 \leqslant i,j \leqslant j\}$ ist linear unabhängig und erzeugt den UVR der Symmetrischen Matrizen. Die Menge S enthält n diagonale Matrizen und
$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$$
andere, also ist die Kardinalität von S gleich $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

(d) Sei W der erwähnte Vektorraum. Für jede $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in W$ und jedes $1 \leqslant i \leqslant n$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 0 \Leftrightarrow a_{in} = \sum_{k=1}^{n-1} a_{ik}.$$

Dies zeigt, dass wir in jeder Zeile $n-1$ Freiheitsgrade haben. Also ist die Dimension von W kleiner oder gleich $n(n-1)$.

Wir suchen jetzt eine Basis von dieser Kardinalität. Für $1 \leqslant i \leqslant n$ und $1 \leqslant k \leqslant n-1$ definieren wir $A_k^{(i)}$ als die Matrix, welche eine 1 an der (i,k)-ten und $(i,k+1)$-ten Stelle hat, und deren andere Einträge alle 0 sind. Sei $S_i = \{A_k^{(i)} \mid 1 \leqslant k \leqslant n-1\}$. Um die Visualisierung zu erleichtern, schreiben wir S_1 aus:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir zeigen zunächst, dass jedes S_i linear unabhänig ist. Betrachte dafür eine verschwindende Linearkombination in S_i. Die Koeffizienten von $A_1^{(i)}$ und $A_{n-1}^{(i)}$ müssen 0 sein, da nur $A_1^{(i)}$ einen nicht-trvialen Eintrag in der ersten Spalte und nur $A_{n-1}^{(i)}$ einen nicht-trivialen Eintrag in der letzten Spalte hat. Wir wiederholen das Argument jetzt in $T \setminus \{A_1^{(i)}, A_{n-1}^{(i)}\}$ für $A_2^{(i)}$ und $A_{n-2}^{(i)}$, und so weiter. Dies zeigt, dass S_i linear unabhängig ist.

Sei jetzt $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$. Betrachte eine verschwindende Linearkombination in S. Da die i-te Zeile verschweinden, muss die Summe der Elemente aus S_i auch den Nullvektor ergeben. Da die S_i linear unabhängig sind, ist es also auch S.

Da $\dim(W) \leqslant n(n-1)$ ist und wir mit S eine linear unabhängige Teilmenge dieser Grösse gefunden haben, ist S eine Basis und wir sind fertig.

2. Sei W der Untervektorraum aufgespannt von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimme ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge W ist.

(b) Wähle aus v_1, v_2, v_3, v_4 alle möglichen Basen von W aus. Wieviele sind es?

Lösung:

(a) Durch Nachrechnen (zum Beispiel mit dem Gauss Algorithmus) sehen wir, dass die Vektoren v_1, v_2 und v_4 linear unabhängig sind. Der Vektor $v_3 = v_1 + v_4$ hängt linear von v_1 und v_4 ab. Demnach ist W eine dreidimensionale Hyperebene in $\mathbb{R}^4$. Es genügt also, den Normalenvektor $n := (n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{R}^4$ zu bestimmen, welcher senkrecht auf v_1, v_2, v_4 steht. Dazu lösen wir das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \langle n, v_1 \rangle &= 0 \\ \langle n, v_2 \rangle &= 0 \\ \langle n, v_4 \rangle &= 0 \end{cases}$$

wobei $\langle n, v_i \rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^4$ bezeichnet. Dieses Gleichungssystem ist also äquivalent zu den Gleichungen

$$\begin{cases} n_1 + 2n_2 + n_3 + 2n_4 &= 0 \\ -n_3 + n_4 &= 0 \\ 2n_2 + n_3 + n_4 &= 0 \end{cases}$$

Duch sukzessives Auflösen dieser 3 Gleichungen, erhalten wir

$$n = (n_1, n_1, -n_1, -n_1)$$

für ein beliebiges $n_1 \in \mathbb{R}$. Da die Länge des Normalenvektors keine Rolle spielt, dürfen wir $n_1 = 1$ wählen und bekommen $n = (1, 1, -1 - 1)$. Um nun ein Gleichungssystem zu finden, dessen Lösugen in W liegen, brauchen wir nur noch die Bedingung

$$\langle n, x \rangle = 0$$

zu stellen, wobei $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ ist. Denn alle Vektoren

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

die diese Bedingung erfüllen (und somit dieses Gleichungssystem lösen), stehen senkrecht auf n und liegen damit in W. Also erhalten wir die Gleichung

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0.$$

(b) Wegen der Beziehung $v_3 = v_1 + v_4$ sind die Vektoren v_1, v_3 und v_4 linear abhängig, wobei jeweils zwei davon linear unabhängig sind. Der Vektor v_2 ist linear unabhängig von allen anderen. Daher muss v_2 sicher Teil jeder Basis (die ausschliesslich die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 enthalten darf) sein. Somit ergeben sich die drei Möglichkeiten:

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_4\}, \quad \mathcal{B}_3 = \{v_2, v_3, v_4\}.$$

3. Bestimme eine Basis und die Dimension der folgenden Vektorräume:

(a) Die Lösungsmenge in $\mathbb{R}^3$ von

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 3x + y + 2z &= 0 \\ 2x + 3z &= 0 \end{aligned}$$

(b) $\{0\}$;

(c) $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z + iw = 0\}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$;

(d) $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z + iw = 0\}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Lösung:

(a) Mit Hilfe des Gauss Algorithmus' bekommen wir als Lösungsmenge für dieses Gleichungssystem den eindimensionalen Vektorraum $V := \left\{\left(-\frac{3}{2}z, \frac{5}{2}z, z\right) \mid z \in \mathbb{R}\right\}$. Eine Basis davon ist beispielsweise der Vektor $(-3, 5, 2)$.

(b) Den Nullvektor können wir als die leere Summe, das heisst die Summe über null Elemente, betrachten. Also ist die leere Menge $\varnothing$ eine Basis von $\{0\}$ und der Vektorraum hat Dimension 0. (Bemerkung: Der Nullvektor 0 kann nie in einer Basis enthalten sein, da 0 nicht linear unabhängig ist.)

(c) Sei V der Vektorraum $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x + iy = 0\}$ über $\mathbb{C}$. Sei $(x, y) \in V$. Dann gilt $x + iy = 0 \Rightarrow y = ix$ und deshalb gilt $(x, y) = (x, ix) = x(1, i)$ für jedes $(x, y) \in V$. Also können wir jedes $(x, y) \in V$ als Linearkombination des Vektors $(1, i)$ schreiben. Dieser ist linear unabhängig in $\mathbb{C}^2$ und somit eine Basis von V. Die komplexe Dimension des Vektorraums ist daher eins.

(d) In d) zeigten wir, dass sich jedes Element in V in der Form $x(1, i), x \in \mathbb{C}$ schreiben lässt. Wenn wir nun $x = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$ setzen, gilt

$$x(1, i) = (a + ib)(1, i) = a(1, i) + ib(1, i) = a(1, i) + b(i, -1).$$

Also lässt sich jedes $(x, y) \in V$ als reelle Linearkombination der Vektoren $(1, i)$ und $(i, -1)$ darstellen. Diese beiden sind in V als Vektorraum über $\mathbb{R}$ linear unabhängig und somit eine Basis. Der Raum ist daher reell zweidimensional.

4. Sei K ein Körper, setze $g(X) := X + 5 \in K[X]$, und sei $d \geqslant 1$. Bestimme die Dimension des Vektorraums

$$W = \{h \in K[X] \mid \deg(h) \leqslant d \wedge \exists f \in K[X] : h = gf\}.$$

Lösung: Sei

$$S = \{g, Xg, X^2g, \ldots, X^{d-1}g\}.$$

Die in dieser Menge enthaltenen Polynome sind alle durch g teilbar und haben

$$\deg(X^i g) = i + \deg(g) = i + 1,$$

was für $0 \leqslant i \leqslant d-1$ kleinergleich d ist. Also ist S in W enthalten. Des Weiteren ist S linear unabhängig, da die enthaltenen Polynome verschiedene Grade haben. Aus

$$W \subset K[X]_{\leqslant d} := \{p \in K[X] \mid \deg(p) \leqslant d\},$$

folgt, dass $\dim(W) \leqslant d+1$ (wir wissen bereits, dass $\{1, X, X^2, \ldots, X^d\}$ eine Basis von $K[X]_{\leqslant d}$ über K ist). Ausserdem ist das konstante Nullpolynom nicht in W enthalten, damit ist seine Dimension höchstens d. Da S eine linear unabhängige Teilmenge ist und d Elemente enthält, ist S schon eine Basis von W und es gilt $\dim(W) = d$.

5. Betrachte die folgenden Unterräume von K^n :

$$U := \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0 \right\},$$
$$D := \{(\alpha, \ldots, \alpha) \in K^n \mid \alpha \in K\}.$$

Bestimme eine Basis und die Dimension der Unterräume $U, D, U \cap D$ und $U + D$.

Hinweis: Vergessen Sie nicht, den Fall zu betrachten, in dem K ein solches Körper ist, dass $n \cdot 1 = 0$.

Lösung: Für $n = 0$ ist $U = D = U \cap D = U + D = 0$. Jeder dieser Unterräume hat also die Basis $\varnothing$ und folglich die Dimension 0 .

Sei nun $n \geqslant 1$. Jedes Element $(\alpha, \ldots, \alpha) \in D$ ist ein Vielfaches des Vektors $v := (1, \ldots, 1)$. Wegen $v \neq 0$ ist $\{v\}$ ein minimales Erzeugendensystem, also eine Basis von D. Insbesondere ist $\dim(D) = 1$. Sodann liegen die $n-1$ Vektoren

$$v_1 = (1, -1, 0, \ldots, 0), \quad v_2 = (0, 1, -1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots \quad v_{n-1} = (0, \ldots, 0, 1, -1)$$

in U und sind linear unabhängig. Insbesondere ist also $\dim(U) \geqslant n-1$. Wegen $(1, 0, \ldots, 0) \notin U$ ist aber $\dim(U) < \dim(K^n) = n$ und wir schliessen $\dim(U) = n-1$. Da die Vektoren $v_1, \ldots, v_{n-1}$ linear unabhängig sind und ihre Anzahl gleich der Dimension von U ist, bilden sie eine Basis von U.

Wenn $n \cdot 1 \neq 0$ ist in K, gilt $v = (1, \ldots, 1) \notin U$. In diesem Fall gilt $U \cap D = 0$, also ist $\varnothing$ eine Basis von $U \cap D$ und $\dim(U \cap D) = 0$. Wegen $U = \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$ folgt dann ausserdem, dass die Vektoren $v, v_1, \ldots, v_{n-1}$ linear unabhängig sind. Das zeigt $\dim(U + D) \geqslant n$. Da aber $\dim(U + V) \leqslant \dim(K^n) = n$ ist, schliessen wir, dass $U + D$ Dimension n hat und die Vektoren $\{v, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ eine Basis von $U + D$ bilden. Natürlich ist dann auch die Standardbasis von K^n eine Basis von $U + D$

Wenn $n \cdot 1 = 0$ ist in K, gilt $v = (1, \ldots, 1) \in U$, also auch $D \subset U$. In diesem Fall ist also $U \cap D = D$ und $U + D = U$. Für beide Unterräume wurde oben eine Basis und die Dimension bestimmt.

6. Bestimme eine Basis und die Dimension des Vektorraums

$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig} \wedge (f + f'' = 0)\}.$$

Hinweis: Bemerken Sie, dass f, f', f'' existieren und stetig sind. Folgender Satz aus der Analysis darf verwendet werden: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$ ist die einzige stetige Lösung von

$$\begin{cases} f + f'' & = & 0 \\ f(0) & = & f'(0) & = & 0 \end{cases}$$

Lösung: Mit dem Hinweis erhalten wir: Für jedes zweimal stetig differenzierbare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0, f'(0) = 0$ und $f(x) + f''(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Sei nun $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } C^2 \text{ und } f + f'' = 0\}$ und sei $f \in V$. Seien $a = f(0)$ und $b = f'(0)$. Sei nun $g(x) = f(x) - a\cos(x) - b\sin(x)$. Es gilt $g(0) = 0, g'(0) = 0$ und $g \in V$ da $\sin(x), \cos(x) \in V$. Also gilt $g(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Somit gilt $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$. Jedes Element in V lässt sich also als Linearkombination von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ darstellen. Diese sind linear unabhängig in V und bilden deshalb eine Basis von V. Somit ist V zweidimensional.