Musterlösung Serie 8

1. Sei F ein Körper. Finde ein Komplement der folgenden Untervektorräume von $M_{n\times n}(F)$ (Siehe Serie 7 für die Definitionen):

   (a) Der Untervektorraum der oberen Dreiecksmatrizen

   (b) Der Untervektorraum der Symmetrischen Matrizen

   Lösung:

   (a) Sei U der Untervektoraum der oberen Dreiecksmatrizen und sei W der Unterraum der strikten unteren Dreiecksmatrizen, d.h. die Menge aller Matrizen der Form$A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ mit $a_{ij} = 0$ für alle $i \leqslant j$. Es bleibt dem Lesenden überlassen nachzuprüfen, dass $M_{n\times n}(F)$ ein Unterraum ist. Wir bemerken, dass jede Matrix als eindeutige Summe einer oberen Dreiecksmatrix und einer strikten unteren Dreiecksmatrix geschrieben werden kann. Anschaulich passiert:

   $$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}.$$

   Also ist $U + W = M_{n\times n}(F)$. Des Weiteren ist $U \cap W = \{0\}$, da die Matrizen in U und jede in W keine nicht trivialen Einträge gemeinsam haben können. Dies zeigt, dass W ein Komplement von U in $M_{n\times n}(F)$ ist.

   (b) Sei W definiert wie oben und sei V der Unterraum der symmetrischen Matrizen. Wir zeigen zunächst $U+W = M_{n\times n}(F)$. Betrachte dafür $C = (c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_{n\times n}(F)$. Sei nun $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ diejenige symmetrische Matrix, sodass

   $$a_{ij} = c_{ij}, \qquad \text{für alle } i \leqslant j.$$

   Bemerke, dass wir A dadurch bereits vollständig bestimmt haben, da die noch nicht explizit definierten Elemente durch die Symmetrie bestimmt werden.

   Wir definieren auch $B = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ als jene strikte untere Dreiecksmatrix mit

   $$b_{ij} = c_{ij} - c_{ji}, \qquad \text{für alle } i > j.$$

   Jetzt gilt $C = A + B$, und damit auch $U + W = M_{n\times n}(F)$.

   Jede Symmetrische Matrix, welche nicht die Nullmatrix hat, muss mindestens einen nicht trivialen Eintrag auf der Diagonalen oder über der Diagonalen haben, und kann deswegen nicht in W enthalten sein. Dies zeigt $U \cap W = \{0\}$.

2. Seien $b, c \in \mathbb{R}$. Sei $\mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynome in einer Variable in $\mathbb{R}$. Definiere $T : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^2$ durch

$$Tp = \left(3p(4) + 5p'(6) + bp(1)p(2), \int_{-1}^{2} x^3 p(x)dx + cp(0)^2\right).$$

Zeige, dass T dann und nur dann linear ist wenn $b = c = 0$.

Solution: Wenn $b = c = 0$ ist, dann gilt

$$Tp = \left(3p(4) + 5p'(6), \int_{-1}^{2} x^3 p(x)dx\right).$$

Wir bemerken, dass die Auswertungsabbildung linear ist: für $p, q \in \mathbb{R}[x]$ und $\mu, \nu, a \in \mathbb{R}$ gilt nämlich

$$(\mu p + \nu q)(a) = \mu p(a) + \nu q(a).$$

Die Ableitungsabbildung $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ ist ebenfalls linear, es gilt

$$(\mu p + \nu q)'(x) = (\mu p)'(x) + (\nu q)'(x) = \mu p'(x) + \nu q'(x).$$

Des Weiteren gilt,

$$\int_{-1}^{2} x^3(\mu p + \nu q)(x)dx = \mu \int_{-1}^{2} x^3 p(x)dx + \nu \int_{-1}^{2} x^3 q(x)dx.$$

Also ist T in diesem Fall als Summe linearer Abbildungen linear.

Sei jetzt $b \neq 0$. Nehme $p, q \in \mathbb{R}[x]$ und $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}(p + q)(1)(p + q)(2) &= (p(1) + q(1))(p(2) + q(2)) \\ &= p(1)p(2) + p(1)q(2) + q(1)p(2) + q(1)q(2).\end{aligned}$$

Die rechte Seite der Gleichung ist im Allgemeinen nicht gleich $p(1)p(2) + q(1)q(2)$. Also ist der erste Eintrag von T nicht linear wenn $b \neq 0$ ist.

Wenn $c \neq 0$ ist, so ist

$$(p + q)(0)^2 = (p(0) + q(0))^2 = p(0)^2 + 2p(0)q(0) + q(0)^2$$

und damit ist der zweite Eintrag von T nicht linear. Dies zeigt die gewünschte Äquivalenz.

3. Seien U und V zwei 4-dimensionale UVR von $\mathbb{C}^6$. Zeige, dass $U \cap V$ zwei linear unabhängige Vektoren enthält.

Lösung: Nehme an, dass $U \cap V$ eindimensional und von w erzeugt ist. Wir können $\{w\}$ zu einer Basis von U fortsetzen. Sei $\mathcal{B}_1 = \{w, u_1, u_2, u_3\}$ eine solche. Genauso setzten wir $\{w\}$ zu einer Basis von W fort, welche wir als $\mathcal{B}_2 = \{w, w_1, w_2, w_3\}$ bezeichnen. Dann ist die Menge

$$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{w, u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3\}$$

eine Basis von $U \cup W$. Allerdings enthält diese Menge sieben verschiedene Vektoren, was einen Widerspruch dazu darstellt, dass $\mathbb{C}^6$ Dimension 6 hat.

4. Sei V ein Vektorraum über einen Körper K. Nehme an, dass $\{v_1, \ldots, v_m\} \subset V$ linear unabhängig ist und sei $w \in V$. Beweise, dass

$$\dim \operatorname{Sp}(v_1 + w, v_2 + w, \ldots, v_m + w) \geqslant m - 1.$$

Lösung: Betrachte die Menge

$$\begin{aligned} &\{v_1 + w, v_2 + w - (v_1 + w), \ldots, v_m + w - (v_1 - w)\} \\ =&\{v_1 + w, v_2 - v_1, \ldots, v_m - v_1\}. \end{aligned}$$

Da $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ linear unabhängig ist, ist auch $\{v_2 - v_1, \ldots, v_m - v_1\}$ linear unabhängig. Da diese Menge $m-1$ linear unabhängiger Vektoren in $\operatorname{Sp}(v_1+w, v_2+w, \ldots, v_m + w)$ enthalten sind, folgt die Aussage.

5. Sei V ein Vektorraum über einen Körper F und betrachte drei lineare UVR U_1, U_2, U_3, sodass $V = U_1 + U_2 + U_3$ und für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$ mit $i \neq j$ gilt, dass $U_i \cap U_j = \{0\}$.

Existiert für jedes $v \in U_1 + U_2 + U_3$ ein eindeutiges Tripel (u_1, u_2, u_3) mit $u_i \in U_i$, sodass $v = u_1 + u_2 + u_3$?

Lösung: Die Aussage ist im Allgemeinen falsch, wir geben ein Gegenbeispiel an. Sei dazu F ein Körper und betrachte die Vektorräume

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x, y, 0) \in F^3 \mid x, y \in F\}, \\ U_2 &= \{(0, 0, z) \in F^3 \mid z \in F\}, \\ U_3 &= \{(0, y, y) \in F^3 \mid y \in F\}. \end{aligned}$$

Dann ist $F^3 = U_1 + U_2 + U_3$, weil für alle $x, y, z \in F$ gilt, dass

$$(x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z) + (0, 0, 0).$$

Auch ist $U_i \cap U_j = \{0\}$ für alle $i \neq j$. Allerdings sind

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= (0, 0, 0) + (0, 0, 0) + (0, 0, 0) \\ (0, 0, 0) &= (0, 1, 0) + (0, 0, 1) + (0, -1, -1). \end{aligned}$$

6. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einen Körper F und sei

$$V \supseteq U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots \supseteq U_k \supseteq \cdots$$

eine unendliche Folge verschachtelter UVR.

(a) Zeige, dass diese Folge irgendwann konstant wird. Beweise also, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geqslant N$ gilt, dass $U_n = U_N$.

(b) Ist die gleiche Aussage auch erfüllt, wenn V unendlichdimensional ist?

(c) Nehmen wir an, dass V unendlichdimensional ist und, dass $\forall n \in \mathbb{N} \dim U_n \geqslant 1$ ist. Was können Sie über $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ sagen?

Solution:

(a) Sei $d := \dim(V)$. Da die Unterräume der gegebenen Folge verschachtelt sind, erhalten wir die folgende monoton fallende Folge in $\mathbb{N}$:

$$d \geqslant \dim(U_0) \geqslant \dim(U_1) \geqslant \dim(U_2) \geqslant \cdots \geqslant \dim(U_k) \geqslant \cdots$$

Da eine untere Schranke dieser Folge durch 0 gegeben ist, muss sie als monotone, beschränkte Folge konvergieren. Also existert $e \in \mathbb{N}$ und $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geqslant N$ die Gleichung $e = \dim(U_N) = \dim(U_n)$ gilt. Für jedes solche n gilt also auch $U_N = U_n$.

(b) Nein, das Beispiel, welches wir in c) besprechen ist ein Gegenbeispiel.

(c) Für jeden beliebigen Vektorraum V liefert die konstante Folge $U_n = V$ den Schnitt V.

Auch wenn die Dimension der U_n mindestens 1 ist, kann ihr Schnitt doch $\{0\}$ sein. Betrachte zum Beispiel den Vektorraum der Polynome in einer Variable $F[X]$ über F. Definiere $U_0 =: F[X]$ und

$$U_i = \mathrm{Sp}(\{X^p \mid p \geqslant i\})$$

Für jedes $i \geqslant 0$ gilt jetzt $\dim U_i \geqslant 1$ da $X^i \in U_i$. Für jedes $N \geqslant 0$ gilt ausserdem

$$\bigcap_{n=0}^{N} U_n = U_N$$

da die Unterräume ineinander enthalten sind. Für jedes Polynom $p \in F[X] \setminus \{0\}$ existiert allerdings $d \geqslant 0$, sodass $p \notin U_d$ (dies gilt natürlich für jedes $d > \deg(p)$). Deswegen ist

$$\bigcap_{n\geqslant 0} U_n = \{0\}.$$

Multiple Choice Fragen. Es kann jeweils mehr als eine Antwort korrekt sein.

Frage 1. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

- ✓ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x + y, 2x, 0)$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x + y, 2x, 0)$
- ✓ $f : K^3 \to K^2$, $(x, y, z) \mapsto (\alpha x + \beta y + \gamma z, \delta x + \varepsilon y + \eta z)$ für fixe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$ in the field K

Frage 2. Welche der folgenden linearen Abbildungen kann als $x \mapsto Ax$ geschrieben werden, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist.

- ✓ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (2x + y, x, 2y)$
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (2x + y, x + 2z)$