Musterlösung Serie 9

1. Sei V ein eindimensionaler Vektorraum über einen Körper K und $T \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$. Zeige, dass ein $\lambda \in K$ existiert, sodass für alle $v \in V$ die Gleichung $Tv = \lambda v$ gilt. Erklären Sie dann, warum ein Isomorphismus $V \to K$ von der Wahl der Basis abhängt, während ein Isomorphismus von $\mathrm{Hom}_K(V, V)$ nach K dies nicht tut.

   Lösung: Sei $v_0 \in V \setminus \{0\}$. Wegen der Eindimensionalität von V ist $\{v_0\}$ eine Basis von V. Es ist $Tv_0 \in V$, also existiert $\lambda \in K$, sodass $Tv_0 = \lambda v_0$. Sei nun $v_1 \in V$. Mit der gleichen Begründung folgt die Existenz eines $\mu \in K$, sodass $v_1 = \mu v_0$. Aus der Linearität von T folgt

   $$Tv_1 = T(\mu v_0) = \mu T(v_0) = \mu\lambda v_0 = \lambda(\mu v_0) = \lambda v_1.$$

   Da v_1 beliebig gewählt wurde, folgt daraus die Behauptung.

   Aliter: In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass jede lineare Abbildung T eine Darstellungsmatrix hat. Da eine 1×1 Matrix ein Skalar ist, folgt unsere Behauptung.

   Für den zweiten Teil der Übung ist zu beachten, dass wir, wenn wir einen linearen Isomorphismus von V nach K definieren wollen, zunächst das Bild einer bestimmten Basis angeben müssen. Ein solcher Homomorphismus wird als "nicht-kanonisch" bezeichnet. Andererseits können wir einen linearen Isomorphismus

   $$\begin{array}{ccl} \mathrm{Hom}(V,V) & \to & K \\ T & \mapsto & \lambda, \text{ wo } \lambda \text{ ist so dass } \forall v \in V : Tv = \lambda v \text{ gilt.} \end{array}$$

   definieren. In diesem Fall brauchten wir keine Basis zu wählen, um den Isomorphismus zu definieren. Ein solcher Homomorphismus wird "kanonisch" genannt.

2. Wir schreiben $\mathbb{R}[x]_d$ für die Menge der Polynomfunktionen über $\mathbb{R}$, deren Grad kleinergleich d ist. Sei $D \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[x]_3, \mathbb{R}[x]_2)$ die Ableitungsabbildung. Es gilt also $Dp = p'$. Finde geeignete Basen von $\mathbb{R}[x]_3$ und $\mathbb{R}[x]_2$, sodass die Darstellungsmatrix von D relativ zu diesen Basen gegeben ist durch

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   Lösung: Betrachte die Basis $\{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$ von $\mathbb{R}[x]_3$ und die Basis $\{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ von $\mathbb{R}[x]_2$. Es gilt

   $$\begin{array}{ccccc} D(1) & = & 0 & = & 0\cdot 1 + 0\cdot(1+x) + 0\cdot(1+x+x^2) \\ D(1+x) & = & 1 & = & 1\cdot 1 + 0\cdot(1+x) + 0\cdot(1+x+x^2) \\ D(1+x+x^2) & = & 1+2x & = & -1\cdot 1 + 2\cdot(1+x) + 0\cdot(1+x+x^2) \\ D(1+x+x^2+x^3) & = & 1+2x+3x^2 & = & -1\cdot 1 + -1\cdot(1+x) + 3\cdot(1+x+x^2) \end{array}$$

Also hat die Darstellungsmatrix von D relativ zu den Basen die gewünschte Form.

3. Seien V, W Vektorräume über einen Körper K. Betrachte einen linearen Unterraum $U \subsetneq V$ und S ein nicht triviales Element von $\mathrm{Hom}_K(U, W)$ (in anderen Worten bildet S nicht alles auf 0 ab.). Wir definieren $T : V \to W$ als

$$Tv = \begin{cases} Sv, & \text{if } v \in U \\ 0, & \text{if } v \in V \setminus U \end{cases}$$

Ist T eine lineare Abbildung?

Solution: Sei $u \in U$ mit $Su \neq 0$. Ein solches u existiert, da S nach unserer Voraussetzung nicht trivial ist. Sei also $v \in V \setminus U$ (Da $U \subsetneq V$ ist, ist dies nicht die leere Menge.). Dann gilt $u + v \notin U$. Wenn dies nämlich erfüllt wäre, so würde ein $u' \in U$ existieren, sodass $u + v = u' \Leftrightarrow v = u' - u \in U$, was unserer Wahl von v widerspricht. Also ist

$$T(u + v) = 0 \neq Su + 0 = Tu + Tv$$

und damit ist T nicht linear.

4. Seien U, V, W Vektorräume über einen Körper K und seien $T : V \to W$ und $S : W \to U$ lineare Abbildungen. Zeige:

   (a) Es gilt
   $$\mathrm{rank}(S \circ T) \leqslant \min(\mathrm{rank}(S), \mathrm{rank}(T)).$$

   (b) Wenn T surjektiv ist gilt $\mathrm{rank}(S \circ T) = \mathrm{rank}(S)$.

   (c) Wenn S injektiv ist gilt $\mathrm{rank}(S \circ T) = \mathrm{rank}(T)$.

Lösung:

(a) Aus der Linearität von T folgt, dass $\mathrm{Bild}(T)$ ein Unterraum von W ist. The restriction of S auf $\mathrm{Bild}(T)$ ist die lineare Abbildung

$$S|_{\mathrm{Bild}(T)} : \begin{array}{ccc} \mathrm{Bild}(T) & \to & U \\ v & \mapsto & S(v). \end{array}$$

Bemerke, dass $\mathrm{Bild}(S \circ T) = \mathrm{Bild}(S|_{\mathrm{Bild}(T)}) \subset \mathrm{Bild}(S)$ ist. Also folgt

$$\mathrm{rank}(S \circ T) = \mathrm{rank}(S|_{\mathrm{Bild}(T)}) \leqslant \mathrm{rank}(S). \tag{1}$$

Andererseits gilt

$$\mathrm{rank}(T) = \dim(\mathrm{Bild}(T)) = \dim(\mathrm{Kern}(S|_{\mathrm{Bild}(T)})) + \mathrm{rank}(S|_{\mathrm{Bild}(T)}). \tag{2}$$

Also ist

$$\mathrm{rank}(S \circ T) = \mathrm{rank}(S|_{\mathrm{Bild}(T)}) \leqslant \mathrm{rank}(T).$$

Daraus folgt

$$\mathrm{rank}(S \circ T) \leqslant \min\{\mathrm{rank}(S), \mathrm{rank}(T)\}.$$

(b) Wenn T surjektiv ist, so ist der Unterraum $\mathrm{Bild}(T) \subset W$ der ganze Vektorraum W. Dann ist

$$S|_{\mathrm{Bild}(T)} = S|_W = S,$$

und zusammen mit Gleichung (1) folgt

$$\mathrm{rank}(S \circ T) = \mathrm{rank}(S|_{\mathrm{Bild}(T)}) = \mathrm{rank}(S).$$

(c) Wenn S injektiv ist, gilt $\dim(\mathrm{Kern}(S)) = 0$. Also ist auch $\dim(\mathrm{Kern}(S|_{\mathrm{Bild}(T)})) = 0$. Zusammen mit (2) folgt

$$\mathrm{rank}(T) = \mathrm{rank}(S|_{\mathrm{Bild}(T)}) = \mathrm{rank}(S \circ T).$$

5. Sei V ein Vektorraum. Ein Endomorphismus $P : V \to V$ mit der Eigenschaft $P^2 := P \circ P = P$ heisst idempotent oder eine Projektion. Zeige:

(a) Für jede Projektion P ist $\mathrm{Bild}(P)$ ein linear Komplement von $\mathrm{Kern}(P)$ in V.

(b) Für beliebige Untervektorräume $W_1, W_2 \subset V$, sodass W_1 ein Komplement von W_2 in V ist, existiert eine eindeutige Projektion $P : V \to V$ mit

$$\mathrm{Kern}(P) = W_1 \quad \text{und} \quad \mathrm{Bild}(P) = W_2.$$

Lösung:

(a) Sei $P\colon V \to V$ eine Projektion und setze

$$W_1 := \mathrm{Kern}(P) \quad \text{und} \quad W_2 := \mathrm{Bild}(P)\,.$$

Wir müssen zeigen, dass $W_1 + W_2 = V$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ ist.
Für ein beliebiges $v \in V$ gilt

$$P(v - P(v)) = P(v) - P^2(v) = P(v) - P(v) = 0,$$

also ist $v - P(v) \in \mathrm{Kern}(P) = W_1$. Weiter ist $P(v) \in \mathrm{Bild}(P) = W_2$. Damit ist

$$v = (v - P(v)) + P(v) \in W_1 + W_2,$$

und es gilt $W_1 + W_2 = V$.
Sodann sei $v \in W_1 \cap W_2$. Da v im Bild von P liegt, gibt es ein $w \in V$ mit $P(w) = v$. Wenden wir P auf beide Seiten der Gleichung an, so folgt $v = P(w) = P^2(w) = P(v)$. Da aber v auch im Kern von P liegt, haben wir $v = P(v) = 0$. Somit ist $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

(b) Seien $W_1, W_2 \subseteq V$ beliebige Untervektorräume von V mit $V = W_1 + W_2$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Für jedes $v \in V$ existieren dann eindeutige $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$, sodass $v = w_1 + w_2$ ist. Betrachte die Abbildung $P\colon V \to V$, die einem solchen $v \in V$ genau dieses $w_2 \in W_2$ zuordnet. Man prüft nun direkt, dass P linear und eine Projektion mit $W_1 = \text{Kern}(P)$ und $W_2 = \text{Bild}(P)$ ist.

Es bleibt zu zeigen, dass P eindeutig ist. Sei P' eine weitere Projektion mit $W_1 = \text{Kern}(P')$ und $W_2 = \text{Bild}(P')$. Dann ist

$$P|_{W_1} = 0 = P'|_{W_1}\,.$$

Für ein beliebiges Element $v \in W_2$ gibt es Elemente $w, w' \in V$, so dass $P(w) = v$ und $P'(w') = v$ ist. Es folgt

$$P(v) - P'(v) = P(P(w)) - P'(P'(w')) = P(w) - P'(w') = v - v = 0$$

und damit $P|_{W_2} = P'|_{W_2}$. Da $V = W_1 + W_2$ ist, gilt damit $P = P'$.

6. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Zeige:

(a) Für jeden Untervektorraum $W' \subset W$ ist das Urbild

$$f^{-1}(W') := \{v \in V \mid f(v) \in W'\}$$

ein Unterraum von V.

(b) Es gilt

$$\dim f^{-1}(W') = \dim \text{Kern}(f) + \dim(\text{Bild}(f) \cap W')$$

Lösung: Sei $V' := f^{-1}(W')$.

(a) Wir müssen zeigen, dass V' nicht leer ist und dass für beliebige Elemente $x, y \in V'$ und beliebige $\alpha \in K$ die Summe $x + y$ und das Produkt αx wieder in V' liegen.

Wegen $f(0) = 0 \in W'$ liegt 0 in V' und V' ist nicht leer. Da f linear ist, gilt

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{und} \quad f(\alpha x) = \alpha f(x)\,.$$

Wegen $f(x)$, $f(y) \in W'$ folgt aus den Unterraumaxiomen, dass auch $f(x) + f(y)$ und $\alpha f(x)$ wieder in W' liegen. Somit liegen $x + y$ und αx wieder in V'.

Note. Stimmt dies auch für das Bild eines Linearen Unterraums unter einer linearen Abbildung?

(b) Aus der Definition von V' folgt, dass wir eine wohldefinierte Abbildung

$$f'\colon V' \to W',\ v' \mapsto f'(v') := f(v)$$

haben. Da f linear ist, ist auch diese linear. Es folgt

$$\dim(V') = \dim(\text{Kern}(f')) + \dim(\text{Bild}(f')). \tag{3}$$

Da $0 \in W'$ ist, gilt $\mathrm{Kern}(f) \subset V'$. Durch Einsetzen der Definition erhält man $\mathrm{Kern}(f') = \mathrm{Kern}(f)$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Bild}(f') &= \{w \in W' \mid \exists v \in V' : f'(v) = w\} \\ &= \{w \in W' \mid \exists v \in V : f(v) = w\} \\ &= \{w \in W \mid \exists v \in V : f(v) = w \text{ und } w \in W'\} \\ &= \mathrm{Bild}(f) \cap W' .\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (3) erhält man

$$\dim(V') = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f) \cap W') .$$

Übungen, die nicht vorgerechnet werden

7. Seien V, W Vektorräume über einen Körper K und sei $T : V \to W$ ein Vektorraumisomorphismus. Zeige:

   (a) Linear unabhängige Mengen werden von T auf linear unabhängige Mengen abgebildet.

   (b) Erzeugende Mengen von V werden von T auf erzeugende Mengen von W abgebildet.

   (c) Basen von V werden von T auf Basen von W abgebildet.

   Lösung: Sind $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig, so existiert eine nicht-triviale Linearkombination $\sum_{i=1}^m a_i v_i = 0$ mit $a_1, \ldots, a_m \in K \setminus \{0\}$. Multiplikation mit A liefert dann eine nicht-triviale Linearkombination $\sum_{i=1}^m a_i A v_i = A \cdot (\sum_{i=1}^m a_i v_i) = A \cdot 0 = 0$. Also sind auch $Av_1, \ldots, Av_n$ linear abhängig.

   Sind umgekehrt $Av_1, \ldots, Av_m$ linear abhängig, so existiert eine nicht-triviale Linearkombination $\sum_{i=1}^m a_i A v_i = 0$ mit $a_1, \ldots, a_m \in K \setminus \{0\}$. Multiplikation mit A^{-1} liefert dann eine nicht-triviale Linearkombination $\sum_{i=1}^m a_i v_i = A^{-1} \cdot A \cdot (\sum_{i=1}^m a_i v_i) = A^{-1} \cdot (\sum_{i=1}^m a_i A v_i) = A^{-1} \cdot 0 = 0$. Also sind auch $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig.

8. Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{Q}$. Wir nennen eine Abbildung $f : V \to W$ additiv, wenn

   $$\forall x \in V \, \forall y \in V : f(x + y) = f(x) + f(y).$$

   Zeige

   $$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, W) = \{f : V \to W \mid f \text{ is additive}\}.$$

   Lösung: Wir müssen zeigen, dass für eine additive Abbildung $f : V \to W$ gilt, dass $\forall q \in \mathbb{Q}$, $\forall v \in V : f(qv) = qf(v)$. Sei $v \in V$. Wir bemerken zunächst

   $$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \implies f(0) = 0.$$

Daraus folgt $0 = f(v + (-v)) = f(v) + (-f(v))$. Also ist $-f(v)$ das additiv Inverse von $f(v)$ in W.

Als nächstes zeigen wir durch Induktion, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt, dass $f(mv) = mf(v)$. Im vorherigen Absatz haben wir den Induktionsstart $m = 0$ gezeigt. Sei nun $k \geqslant 1$ und nehme an, dass die Aussage für alle $0 \leqslant m \leqslant k$ bekannt ist. Wir wollen die Aussage jetzt für $k + 1$ zeigen. Es gilt

$$f((k+1)v) = f(kv + v) = f(kv) + f(v) = kf(v) + f(v) = (k+1)f(v),$$

wobei wir die Induktionshypothese benutzt haben, um die vorletzte Gleichung zu erhalten. Für jede negative ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist $-n \in \mathbb{N}$. Also gilt

$$f(nv) = f((-n)(-v)) = (-n)f(-v) = (-n)(-f(v)) = nf(v).$$

Damit folgt $f(nv) = nf(v)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Schliesslich stellen wir fest, dass für jedes $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ die Gleichung

$$\frac{n}{n}f(v) = f(v) = f\left(\frac{n}{n}v\right) = nf\left(\frac{1}{n}v\right) \Leftrightarrow n\left(\frac{1}{n}f(v) - f\left(\frac{1}{n}v\right)\right) = 0$$

erfüllt ist. Dies ist äquivalent zu $\frac{1}{n}f(v) = f\left(\frac{1}{n}v\right)$.

Zusammen erhalten wir, dass für alle $m \in \mathbb{Z}$ und alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und jedes $v \in V$ gilt:

$$f\left(\frac{m}{n}v\right) = mf\left(\frac{1}{n}v\right) = \frac{m}{n}f(v).$$

Da jede rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ geschrieben werden kann als $q = \frac{m}{n}$ für $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, haben wir bewiesen, dass f auch $\mathbb{Q}$-linear ist.

Multiple Choice Fragen. Mehrere Antworten können richtig sein.

Frage 1. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Basen von $\mathbb{R}^2$ und (e_1, e_2) die Standardbasis. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in Bezug auf $\mathcal{A}$ als Basis der Definitionsbereich und $\mathcal{B}$ als Basis der Zielbereich. Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?

- ✓ Wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ jeweils die Standardbasis sind, ist f eine Drehung um den Punkt $(0,0)$.
- ✓ Wenn $\mathcal{A}$ die Standardbasis und $\mathcal{B} = (e_2, -e_1)$ ist, ist f eine Punktspiegelung an dem Punkt $(0,0)$.

- ✓ Wenn $\mathcal{A}$ die Standardbasis und f die Identität ist, ist $\mathcal{B} = (-e_2, e_1)$.
- ✓ Wenn $\mathcal{B}$ die Standardbasis und f die Spiegelung an der y-Achse ist, ist $\mathcal{A} = (e_2, e_1)$.

Frage 2. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ✓ Sei V einen $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension n. Die Abbildung $V \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$, die jedem Vektor seinen Koordinatenvektor bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ zuordnet, ist linear.
- Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear mit $\mathrm{Kern}(f) \neq \{0\}$ und $\mathrm{Bild}(f) \neq \{0\}$. Dann existiert ein Vektor $v \neq 0$, der gleichzeitig im Kern und im Bild von f liegt.
- ✓ Falls der Kern einer linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nur aus dem Null-vektor besteht, so ist die Abbildung invertierbar.