Musterlösung Serie 10

1. Betrachte den reellen Vektorraum $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (a) Berechne das Quadrat von
   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

   (b) Finde eine Formel für die n-te Potenz von $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   Solution:

   (a) Es gilt
   $$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}.$$

   (b) Wir zeigen per Induktion, dass für alle $n \geqslant 1$ die folgende Gleichung gilt:
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei nun $n \geqslant 1$ und setze voraus, dass wir die Aussage für alle $k \leqslant n$ bereits wissen. Es gilt
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
   wobei wir die Induktionsvoraussetzung für die vorlezte Gleichung benutzt haben.

2. Sei $\mathbb{R}[X]_n$ der Vektorraum aller Polynome von Grad $\leqslant n$ mit reellen Koeffizienten.

   (a) Zeige, dass
   $$F : \mathbb{R}[X]_n \to \mathbb{R}[X]_n, \quad p \mapsto p'' + p'$$
   eine lineare Abbildung ist, wobei p' die Ableitung von p bezeichnet.

   (b) Bestimme die Matrix von F bezüglich der Basis $(1, x, \ldots, x^n)$ von $\mathbb{R}[X]_n$.

   Lösung:

(a) Wegen

$$(\lambda p + \mu q)' = (\lambda p)' + (\mu q)' = \lambda p' + \mu q'$$

für alle $p, q \in \mathbb{R}[X]_n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist die Ableitungsabbildung $p \mapsto p'$ linear. Da die Verknüpfung linearer Abbildungen wieder linear ist, ist auch die Bildung der zweiten Ableitung linear. Da die Summe zweier linearer Abbildungen linear ist, ist somit auch $p \mapsto p'' + p'$ linear.

(b) Es gilt

$$F\left(x^j\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } j = 0 \\ 1 & \text{für } j = 1 \\ jx^{j-1} + j(j-1)x^{j-2} & \text{für } j \geqslant 2. \end{cases}$$

Also die Darstellungsmatrix von F bezüglich der geordneten Basis $\mathcal{B} = (1, x, \ldots, x^n)$ gleich

$${}_{\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{B}} = \left(j\delta_{i,j-1} + j(j-1)\delta_{i,j-2}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n},$$

wobei die Indizierung der Matrix bei 0 beginnt. Für $n \geqslant 2$ lässt sich diese Matrix alternativ auch schreiben als

$${}_{\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 12 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

3. Sei K ein Körper.

(a) Betrachte die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{k\times(n-k)} \\ 0_{(n-k)\times k} & A_2 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K)$$

mit $A_1 \in M_{k\times k}(K)$ und $A_2 \in M_{(n-k)\times(n-k)}(K)$ für ein $k \geqslant 1$, und

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0_{k\times(n-k)} \\ 0_{(n-k)\times k} & B_2 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K)$$

mit $B_1 \in M_{k\times k}(K)$ und $B_2 \in M_{(n-k)\times(n-k)}(K)$. Zeige:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_1 \cdot B_1 & 0_{k\times(n-k)} \\ 0_{(n-k)\times k} & A_2 \cdot B_2 \end{pmatrix}$$

(b) Sei A wie oben definiert und seien A_1, respektive A_2, invertierbar in $M_{k\times k}(K)$, respektive $M_{(n-k)\times(n-k)}(K)$. Zeige, dass dann A invertierbar ist.

(c) Betrachte den Untervektorraum U der oberen Dreiecksmatrizen in $M_{n\times n}(K)$. Zeige, dass das Produkt von zwei Elementen in U wieder in U enthalten ist.

Lösung:

(a) Sei $C := A \cdot B$. Wir schreiben $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ und $C = (c_{ij})$. Dann gilt:

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n : \quad c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j}.$$

Wir teilen die Einträge der Marix in Quadranten ein

$$\begin{array}{cc} 1 \leqslant i, j \leqslant k, & 1 \leqslant i \leqslant k \wedge k < j \leqslant n, \\ k < i \leqslant n \wedge 1 \leqslant j \leqslant k, & k < i, j \leqslant n \end{array}$$

und behandeln die Fälle einzeln.

Wenn $1 \leqslant i, j \leqslant k$ ist, dann gilt

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} a_{i\ell} b_{\ell j} + \sum_{\ell=k+1}^{n} 0 \cdot 0 = \sum_{\ell=1}^{k} a_{i\ell} b_{\ell j}.$$

Die letzte Summe entspricht der Formel zur Berechnung eines Elements von $A_1 \cdot B_1$, da i, j beliebige Elemente in $\{1, \ldots, k\}$ sind.

Für die anderen drei Quadranten gehen wir analog vor um die gewünschte Formel zu erreichen.

(b) Wir schreiben A_i^{-1} für die Inverse von A_i, $i = 1, 2$ und definieren

$$B := \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0_{k\times(n-k)} \\ 0_{(n-k)\times k} & A_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Mit (a) folgt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_1 \cdot A_1^{-1} & 0_{k\times(n-k)} \\ 0_{(n-k)\times k} & A_2 \cdot A_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & 0_{k\times(n-k)} \\ 0_{(n-k)\times k} & I_{n-k} \end{pmatrix} = I_n,$$

wobei mit I_ℓ, $1 \leqslant \ell \leqslant n$, die Identitätsmatrix der Grösse $\ell \times \ell$ gemeint ist. Also ist A invertierbar mit Inverse B in $M_{n\times n}(K)$.

(c) Seien $A, B \in M_{n\times n}(K)$ obere Dreiecksmatrizen und bezeichne ihr Produkt mit C. Für beliebige $1 \leqslant i, j \leqslant n$ gilt

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j}.$$

Da $a_{i\ell} = 0$ für $\ell < i$ ist und $b_{\ell j} = 0$ für $\ell > j$ ist, erhalten wir

$$c_{ij} = \sum_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant n \\ i \leqslant \ell \leqslant j}} a_{i\ell} b_{\ell j}, \quad \text{falls } i \leqslant j$$

und sonst $c_{ij} = 0$. Also ist C eine obere Dreiecksmatrix.

4. Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K.

   (a) Zeige: Wenn $2 \leqslant \dim V \leqslant \dim W$ gilt, dann ist

   $$\mathcal{S} := \{T \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid T \text{ ist nicht injektiv}\}$$

   kein Untervektorraum von $\operatorname{Hom}(V, W)$.

   (b) Zeige: Wenn $\dim V \geqslant \dim W \geqslant 2$ gilt, so ist

   $$\mathcal{T} := \{T \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid T \text{ ist nicht surjektiv}\}$$

   kein Untervektorraum von $\operatorname{Hom}(V, W)$.

Lösung:

(a) Wir zeigen, dass zwei Elemente $T, T' \in \mathcal{S}$ existieren, sodass $T + T' \notin \mathcal{S}$ ist. Sei $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\} \subset V$ eine Basis von V und sei $\{w_1, w_2, \ldots, w_s\} \subset W$ eine Basis von W. Per Voraussetzung gilt $2 \leqslant r \leqslant s$. Wir definieren $T \in \mathcal{S}$ wie folgt: wir setzten $T(v_1) = w_1$ und $T(v_i) = 0$ für alle $2 \leqslant i \leqslant r$ und setzen diese Wahl linear auf V fort. Dann sind $\dim(\operatorname{Kern}(T)) = r - 1$ und $\operatorname{rank}(T) = 1$. Also ist T nicht injektiv und T ist nicht die triviale Abbildung, d.h. $T \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$.

Als nächstes definieren wir T'. Wir setzen $T'(v_1) = 0$ und $T'(v_i) = w_i$ für alle $2 \leqslant i \leqslant r$und setzen diese Wahl linear auf V fort. Betrachte nun $v = \sum_{i=1}^{r} a_i v_i \in \operatorname{Kern}(T + T')$. Dann ist

$$0 = (T + T')\left(\sum_{i=1}^{r} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{r} a_i (T(v_i) + T'(v_i)) = \sum_{i=1}^{r} a_i w_i.$$

Da $\{w_1, w_2, \ldots w_r\}$ linear unabhängig in W ist, bedeutet dies schon $\forall 1 \leqslant i \leqslant r : a_i = 0$, also ist $v = 0$. Dann ist $T + T'$ aber injektiv und somit nicht in $\mathcal{S}$ enthalten.

(b) Sei $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ eine Basis von V und $\{w_1, w_2, \ldots, w_s\}$ eine Basis von W. Per Voraussetzung ist $2 \leqslant s \leqslant r$. Wir definieren $T \in \mathcal{T}$ genau wie in (a). Da $\operatorname{Bild}(T) \subseteq \operatorname{Sp}(w_1) \not\ni w_2$ gilt, ist T nicht surjektiv. Wir definieren T' zunächst auf den Basiselementen: wir setzen $T'(v_1) = 0$, für $2 \leqslant i \leqslant s$ definieren wir

$T'(v_i) = w_s$; und für $s < i \leqslant r$ schliesslich $T'(v_i) = w_s$. Wir setzen diese Wahl linear auf V fort. Da $\mathrm{Bild}(T') \subseteq \mathrm{Sp}(w_2, \cdots, w_s) \not\ni w_1$, ist $T' \in \mathcal{T}$.
Allerdings ist $T + T'$ surjektiv. Betrachte dafür $w = \sum_{i=1}^s a_i w_i \in W$. Dann ist

$$\begin{aligned} w = a_1 T(v_1) + \sum_{i=2}^s a_i T'(v_i) &= \sum_{i=1}^s a_i (T(v_i) + T'(v_i)) \\ &= \sum_{i=1}^s (T + T')(a_i v_i) \in \mathrm{Bild}(T + T'). \end{aligned}$$

Also ist $T + T' \notin \mathcal{T}$.

5. Seien lineare Abbildungen $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}.$$

Sei weiterhin

$$\mathcal{A} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ und sei

$$\mathcal{C} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Zeige, dass $\mathcal{A}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ und $\mathcal{C}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimme $g \circ f$ und die Darstellungsmatrix ...
   (i) von f bezüglich der Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.
   (ii) von g bezüglich der Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$.
   (iii) von $g \circ f$ bezüglich der Basen $\mathcal{A}, \mathcal{C}$.

Lösung:

(a) Man prüft durch Anwendung des Gaussalgorithmus, dass die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

invertierbar sind. Dies zeigt, dass $\mathcal{A}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ und $\mathcal{C}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Die Abbildungen f und g sind durch Linksmultiplikation mit einer Matrix darstellbar, nämlich $f = T_U$ und $g = T_V$ für

$$U := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $g \circ f = T_V \circ T_U = T_{VU}$ für die Matrix

$$VU = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen U, V, VU sind gleichzeitig die Darstellungsmatrizen von $f, g, g \circ f$ bezüglich der jeweiligen Standardbasen $\mathcal{B}_n$ von $\mathbb{R}^n$, das heisst, es gilt

$$U = [f]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_4}, \quad V = [g]^{\mathcal{B}_3}_{\mathcal{B}_2} \quad \text{und} \quad VU = [g \circ f]^{\mathcal{B}_3}_{\mathcal{B}_4}.$$

Die Matrix A ist die Basiswechselmatrix $A = {}_{\mathcal{B}_4}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}]_{\mathcal{A}}$ und die Matrix C ist die Basiswechselmatrix $C = {}_{\mathcal{B}_3}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{C}}$.

(i) Die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist

$$\begin{aligned} [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} &= [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_4} \cdot [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}]^{\mathcal{B}_4}_{\mathcal{A}} \\ &= U \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 11 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} [g]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} &= [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_3} \cdot [g]^{\mathcal{B}_3}_{\mathcal{B}} \\ &= \left([\mathrm{id}^{-1}_{\mathbb{R}^3}]^{\mathcal{B}_3}_{\mathcal{C}}\right)^{-1} \cdot [g]^{\mathcal{B}_3}_{\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(iii) Die Darstellungsmatrix von $g \circ f$ bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$ ist

$$\begin{aligned} [g \circ f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}} &= [g]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \cdot [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -10 & -4 & -7 \\ -2 & -11 & -4 & -5 \\ 10 & 42 & 16 & 24 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6. Sei V ein Vektorraum über einen Körper K. Betrachte zwei lineare Abbildungen T_1 and T_2 von V zu K, die den gleichen Kern haben. Zeige, dass eine Konstante $c \in K$ existiert, sodass $T_1 = cT_2$ gilt.

Hinweis: Benutze Übung 1 der 9. Serie. *Lösung*: Wenn T_1 oder T_2 die triviale Abbildung ist, folgt das Resultat sofort. Wir nehmen also an, dass T_2 nicht trivial ist, d.h. $\ker(T_2) \subsetneq V$. Sei $u \in V \setminus \ker(T_2)$. Für $v_0 := \frac{u}{T_2(u)}$ ist dann $T_2(v_0) = 1 \in K$. Sei $v \in V$ und betrachte

$$w = v - T_2(v)v_0 \in V.$$

Dies ist ein Element von $\ker(T_2)$, da

$$T_2(w) = T_2(v) - T_2(v)T_2(v_0) = T_2(v) - T_2(v) = 0.$$

Per Voraussetzung ist $\ker(T_1) = \ker(T_2)$, also

$$0 = T_1(v) = T_1(v) - T_2(v)T_1(v_0) \Leftrightarrow T_1(v) = T_1(v_0)T_2(v).$$

Weil $v \in V$ beliebig gewählt war, setzen wir $c := T_1(v_0)$ und erhalten

$$T_1 = cT_2.$$