Prof. M. Einsiedler
Prof. P. Biran

Musterlösung Serie 11

1. Betrachte endlichdimensionale Vektorräume V, W über einem Körper K. Sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Zeige, dass $\mathrm{rank}(T) = 1$ dann und nur dann erfüllt ist, wenn eine Basis $\mathcal{B}$ von V und eine Basis $\mathcal{C}$ von W existiert, sodass alle Einträge der Darstellungsmatrix $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ von T bezüglicher der Basen 1 sind.

   Solution: Sei $m = \dim(V)$ und $n = \dim(W)$. Wir schreiben ausserdem $\mathcal{B}_0$, beziehungsweise $\mathcal{C}_0$ für irgendeine Basis von V beziehungsweise W. Da T ein Homomorphismus mit Rang 1 ist, hat auch die Matrix $[T]^{\mathcal{B}_0}_{\mathcal{C}_0}$ Rang 1. Deswegen ist sie äquivalent zu jeder anderen Matrix in $M_{n\times m}(K)$ von Rang 1, also existieren insbesondere Matrizen $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $Q \in \mathrm{GL}_m(K)$, sodass $P[T]^{\mathcal{B}_0}_{\mathcal{C}_0}Q = A$, wobei $A \in M_{n\times n}(K)$ die Matrix ist, deren Einträge alle 1 sind. Weil $Q \in \mathrm{GL}_m(K)$ ist, kann es als Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{B}_0$ angesehen werden, wobei $\mathcal{B}$ so definiert ist, dass das Diagram

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{Id}_V"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}_0}"] \\ K^m \arrow[r, "P"] & K^m \end{tikzcd}$$

   kommutiert. Genauso definiert C eine Basistransformation von $\mathcal{C}_0$ zu einer Basis $\mathcal{C}$. Dann ist

$$A = P[T]^{\mathcal{B}_0}_{\mathcal{C}_0}Q = [\mathrm{Id}_W]^{\mathcal{C}\prime}_{\mathcal{C}}[T]^{\mathcal{B}_0}_{\mathcal{C}_0}[\mathrm{Id}_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_0} = [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}.$$

2. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und betrachte $S, T, U \in \mathrm{Hom}(V, V)$ mit $STU = \mathrm{Id}_V$. Zeige, dass T invertierbar ist und $T^{-1} = US$ gilt.

   Solution: Aus $STU = \mathrm{Id}_V$ folgt, dass STU ein Automorphismus von V ist. Da $\{0\} = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Ker}(STU) \supseteq \mathrm{Ker}(U)$, muss also U injektiv sein. Weil V endlichdimensional ist, ist U schon bijektiv und somit invertierbar. Also ist

$$ST = U^{-1}.$$

   Aus $V = \mathrm{Im}(STU) \subseteq \mathrm{Im}(S)$ folgt auch, dass S surjektiv ist. Weil $S : V \to V$ und V endlich dimensional ist, impliziert dies, dass S is injektiv ist. Also ist S invertierbar und es gilt

$$T = S^{-1}U^{-1}.$$

   Also muss auch T invertierbar sein, und es gilt

$$T^{-1} = US.$$

3. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Sei ausserdem $T \in \mathrm{Hom}(V, V)$ und seien $\mathcal{A} = \{u_1, \dots, u_n\}$ und $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basen von V. Beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

   (a) T ist invertierbar.

   (b) Die Spalten von $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ sind linear unabhängig in K^n_{Spal}.

   (c) Die Spalten von $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ spannen K^n_{Spal} auf.

   (d) Die Zeilen von $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ sind linear unabhängig in K^n_{Zeile}.

   (e) Die Zeilen von $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ spannen K^n_{Zeile} auf.

   Lösung: Dies wird in Proposition 3.6.8 (S.128) in Menny Aka's Skript bewiesen, welches auf der Kurswebsite heruntergeladen werden kann.

4. Sei V ein beliebiger endlichdimensionaler Vektorraum. Beweise oder widerlege:

   (a) Sei $V' \subset V$ ein Unterraum. Jeder Automorphismus $f : V' \to V'$ kann zu einem Automorphismus $\bar{f} : V \to V$ fortgesetzt werden.

   (b) Für jeden Endomorphismus $f : V \to V$, ist $\mathrm{Im}(f)$ ein linear Komplement von $\mathrm{Ker}(f)$ in V.

   (c) Keine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ existiert, sodass

   $$\mathrm{rank}(T) = \dim \mathrm{Ker}(T).$$

   Lösung:

   (a) Diese Aussage ist richtig. Wähle ein Komplement von V', das heisst, einen Unterraum V'' von V mit $V = V' \oplus V''$. Dann ist die Abbildung

   $$V' \times V'' \to V, (v', v'') \mapsto v' + v''$$

   bijektiv. Definiere eine Abbildung $\bar{f} : V \to V$ durch $\bar{f}(v' + v'') := f(v') + v''$ für alle $v' \in V'$ und $v'' \in V''$. Da f linear ist, zeigt eine direkte Rechnung, dass auch $\bar{f}$ linear ist. Wir behaupten, dass $\bar{f}$ bijektiv ist. Seien dafür zunächst $v' \in V'$ und $v'' \in V''$ mit $f(v') + v'' = 0$. Dann ist $f(v') = -v'' \in V' \cap V'' = \{0\}$ und somit $f(v') = v'' = 0$. Wegen der Injektivität von f ist dann auch $v' = 0$. Also ist $\mathrm{Ker}(\bar{f}) = \{0\}$ und somit $\bar{f}$ injektiv. Sei andererseits $v \in V$ beliebig. Schreibe $v = v' + v''$ mit $v' \in V'$ und $v'' \in V''$. Dann ist $v' = f(f^{-1}(v'))$ und somit $v = f(f^{-1}(v')) + v'' = \bar{f}(f^{-1}(v') + v'')$. Also ist $\bar{f}$ surjektiv. Insgesamt ist $\bar{f}$ bijektiv und daher ein Isomorphismus $V \to V$, also ein Au– tomorphismus von V.

   (b) Diese Aussage ist falsch. Betrachte zum Beispiel den durch Linksmultiplikation mit der Matrix

   $$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegebenen Endomorphismus $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Dann ist $\operatorname{Ker}(L_A) = \left\langle (1,0)^T \right\rangle = \operatorname{Bild}(L_A)$. Die zwei Unterräume haben weder den Durchschnitt $\{0\}$, noch erzeugen sie zusammen $\mathbb{R}^2$, daher können sie nicht die innere direkte Summe $V = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Bild}(f)$ bilden.

(c) Betrachte einen Endomorphismus $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$. Nach dem Dimensionssatz gilt

$$\operatorname{rank}(T) + \dim(\operatorname{Ker}(T)) = \dim(\mathbb{R}^5) = 5.$$

Wenn jetzt $\operatorname{rank}(T) = \dim(\operatorname{Ker}(T))$ wäre, so folgte

$$5 = 2 \operatorname{rank}(T) \in 2\mathbb{Z},$$

was dem Ungeradesein von 5 widerspricht.

5. Betrachte den Vektorraum $M_{2\times 2}(K)$ der 2×2 Matrizen über einem Körper K.

   (a) Zeige, dass für $A \in M_{2\times 2}(K)$ aus $A^2 \neq 0$ schon $A^k \neq 0$ für alle $k \geqslant 3$ folgt.

   (b) Finde einen Körper K und eine Matrix $A \in M_{2\times 2}(K) \setminus \{0\}$, sodass $\exists n \in \mathbb{N} : A^n = 0$ erfüllt ist.

Solution:

(a) Sei $A \in M_{2\times 2}(K)$ und schreibe $T = T_A$ für die mit A assoziierte lineare Abbildung. Wenn $T(K^2) = K^2$ ist, so ist T ein isomorphismus und $T^k \neq 0$für alle $k \geqslant 1$.

Nehme nun an, dass $T(K^2) = L$ ein eindimensionaler Unterraum von K^2 ist. Dann ist $T^2(K^2) = T(L) \subseteq L$. Da $T^2 \neq 0$ ist, folgt $T^2(K^2) = T(L) = L$.

Sei nun $n \geqslant 2$. Nehme an, dass $T^m(K^2) = L$ für alle $2 \leqslant m \leqslant n$ gilt. Wir wollen zeigen, dass dann $T^{n+1}(K^2) = L$ ist. Es gilt

$$T^{n+1}(K^2) = T(T^n(K^2)) = T(L) = L.$$

Also ist $T^k \neq 0$ für alle $k \geqslant 1$.

(b) Betrachte zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}).$$

6. Bestimme die Ränge der folgenden rationalen $n \times n$-Matrizen, d.h. Elemente von $M_{n\times n}(\mathbb{Q})$, in Abhängigkeit von der positiven ganzen Zahl n.

   (a) $(kl)_{k,l=1,\dots,n}$;

   (b) $\left((-1)^{k+l}(k+l-1)\right)_{k,l=1,\dots,n}$;

   (c) $\displaystyle\left(\frac{(k+l)!}{k!l!}\right)_{k,l=0,\dots,n-1}$.

Hinweis: Beachten Sie, dass die letzte Matrix von 0 bis n-1 indiziert ist. Verwenden Sie die Induktion, um die Formel zu finden.

Lösung:

(a) Setze $B := (b_{kl})_{k,l=1,\ldots,n} := (kl)_{k,l=1,\ldots,n}$. Sei $B' = (b'_{kl})_{k,l=1,\ldots,n}$ die Matrix, die aus B entsteht, indem man für jedes $k = 2, \ldots, n$ das k-fache der ersten Zeile von der k-ten Zeile subtrahiert. Dann gilt

$$b'_{kl} = \begin{cases} b_{kl} = l & \text{falls } k = 1 \\ b_{kl} - kb_{1l} = kl - kl = 0 & \text{falls } k > 1. \end{cases}$$

Daher hat die Matrix B' genau eine nicht verschwindende Zeile und somit Rang 1 . Da B' durch elementare Zeilenoperationen aus B entstanden ist, also durch Linksmultiplikation mit einer invertierbaren Matrix, hat B' denselben Rang wie B. Also folgt $\mathrm{Rang}(B) = 1$.

Aliter: Sei $u := (1, \ldots, n)$ die $1 \times n$ Matrix mit Eintrag i an der Position (1, i). Dann gilt $B = u^T \cdot u$. Da Rang $(u) \leqslant 1$ ist, folgt aus Aufgabe 3 (c), dass auch $\mathrm{Rang}(B) \leqslant 1$ ist. Wegen $B \neq 0$ gilt zudem $\mathrm{Rang}(B) \geqslant 1$ und daher $\mathrm{Rang}(B) = 1$.

(b) Sei $B := (b_{kl})_{k,l=1,\ldots,n}$ mit $b_{kl} := (-1)^{k+l}(k+l-1)$. Für $n = 1$ hat $B = (1) \neq 0$ Rang 1 , wir können also $n \geqslant 2$ annehmen. Für alle $k = 1, \ldots, n-2$ und $l = 1, \ldots, n$ gilt

$$b_{kl} + 2b_{k+1,l} + b_{k+2,l} = 0,$$

also ist die k-te Zeile von B eine Linearkombination der $(k+1)$-ten und der $(k+2)$-ten Zeile. Man kann daher B durch Zeilenoperationen zu einer Matrix umformen, in der bis auf die letzten beiden Zeilen alle Einträge verschwinden und die letzten beiden Zeilen mit denen von B übereinstimmen. Man prüft dann direkt, dass diese beiden Zeilen linear unabhängig sind. Es folgt

$$\mathrm{rank}(B) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1 \\ 2, & \text{falls } n \geqslant 2 \end{cases}$$

(c) Sei $C_n := (c_{kl})_{k,l=0,\ldots,n-1}$ die Matrix mit $c_{kl} := \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} = \begin{pmatrix} k+l \\ l \end{pmatrix}$.

Behauptung: $\mathrm{rank}\,(C_n) = n$.

Beweis: Wir benutzen Induktion über n. Im Fall $n = 1$ stimmt die Behauptung, da $C_1 = (1) \neq 0$ ist. Angenommen, die Aussage gilt für ein $n \geqslant 1$. Sei $C' = (c'_{kl})_{k,l=0,\ldots,n}$ die Matrix, welche aus C_{n+1} entsteht, indem man beginnend mit der letzten Zeile jeweils die vorhergehende Zeile subtrahiert. In Formeln:

$$c'_{kl} := \begin{cases} c_{kl} - c_{k-1,l} & \text{falls } k = 1, \ldots, n \\ c_{0l} & \text{falls } k = 0. \end{cases}$$

Sei weiter $C'' = (c''_{kl})_{k,l=0,\ldots,n}$ diejenige Matrix, welche aus C' entsteht, indem man beginned mit der letzten Spalte jeweils die vorhergehende Spalte subtrahiert. In Formeln:

$$c''_{kl} := \begin{cases} c'_{kl} - c'_{k,l-1} & l = 1, \ldots, n \\ c'_{k0} & l = 0. \end{cases}$$

Für alle $1 \leqslant k, l \leqslant n$ gilt dann

$$\begin{aligned} c''_{kl} &= c'_{kl} - c'_{k,l-1} \\ &= (c_{kl} - c_{k-1,l}) - (c_{k,l-1} - c_{k-1,l-1}) \\ &= \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} - \frac{(k+\ell-1)!}{(k-1)!\ell!} - \frac{(k+\ell-1)!}{k!(\ell-1)!} + \frac{(k+\ell-2)!}{(k-1)!(\ell-1)!} \\ &= \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!}\left(1 - \frac{k}{k+1} - \frac{l}{k+l}\right) + \frac{(k+\ell-2)!}{(k-1)!(\ell-1)!} \\ &= \frac{(k+\ell-2)!}{(k-1)!(\ell-1)!}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$C'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_n & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

und es folgt

$$\text{Rang } C_{n+1} = \text{Rang}\,(C'') = 1 + \text{ Rang } C_n = n + 1.$$