Musterlösung Serie 12

1. Bestimme ob die jeweils gegebene Matrix invertierbar ist. Falls dem so ist, berechne ihre Inverse.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) Diese Matrix hat Rang 1, da die erste Zeile nicht trivial und gleich der zweiten und dritten Zeile ist. Also kann diese Matrix durch Anwendung elementarer Zeilenoperationen nicht zur Identitätsmatrix transformiert werden und ist somit nicht invertierbar.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 4/5 & -1/5 & -1/5 & -1/5 \\ -1/5 & 4/5 & -1/5 & -1/5 \\ -1/5 & -1/5 & 4/5 & -1/5 \\ -1/5 & -1/5 & -1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 35/11 & -16/11 & 13/11 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 10/11 & -3/11 & 10/11 & -1 \\ -16/11 & 7/11 & -5/11 & 1 \end{pmatrix}.$

2. Zeigen Sie, dass eine quadratische Matrix A genau dann invertierbar ist, wenn ihre Transponierte A^T invertierbar ist, und dann ist $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

   Lösung: Wir wissen bereits, dass für alle quadratischen Matrizen A und B der gleichen Grösse die Rechenregel $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ gilt.

   Nehmen wir zuerst an, dass A invertierbar ist mit der Inversen A^{-1}. Dann rechnen wir:

$$A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = I^T = I,$$
$$(A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T = I^T = I.$$

   Daher ist A^T invertierbar mit der Inversen $(A^{-1})^T$, also gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

   Nehmen wir jetzt umgekehrt an, die Matrix A^T ist invertierbar. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $(A^T)^T = A$ ist. Mit dem oben Bewiesenen für die Matrix A^T anstatt A folgt dann, dass $(A^T)^T = A$ invertierbar ist.

3. (a) Seien V, W zwei n-dimensionale Vektorräume über einen Körper K. Seien $S \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $T \in \mathrm{Hom}(W, V)$, sodass $T \circ S = \mathrm{Id}_V$ ist. Zeige, dass S invertierbar ist und T die Inverse von S ist.

   (b) Seien $A, B \in M_{n\times n}(K)$, sodass $A \cdot B = I_n$. Zeige, dass A invertierbar ist und die Inverse B hat.

   Lösung:

   (a) Da S eine Linksinverse hat, ist er injektiv. Da W endlichdimensional ist und die gleiche Dimension wie V hat, muss S somit auch surjektiv sein. Da T eine Rechtsinverse hat, ist er injektiv. Aus $\dim(V) = \dim(W) = n$ und der Injektivität folgt nun auch die Surjektivität von T. Also sind S und T isomorphismen und damit invertierbar. Für $w \in W$ existiert genau ein$v \in V$ mit $S(v) = w$. Also ist

$$S \circ T(w) = S \circ T(S(v)) = S(v) = w.$$

   Somit gelten

$$T \circ S = \mathrm{Id}_V \quad \text{und} \quad S \circ T = \mathrm{Id}_W,$$

   was per Definition bedeutet, dass T die Inverse von S ist.

   (b) Die Matrizen A und B definieren jeweils lineare Abbildungen $T_A : K^n_{\mathrm{col}} \to K^n_{\mathrm{col}}$, $v \mapsto A \cdot v$ und $T_B : K^n_{\mathrm{col}} \to K^n_{\mathrm{col}}$, $v \mapsto B \cdot v$. Da $A \cdot B = I_n$ gilt für jedes $w \in K^n_{\mathrm{col}}$ die Gleichung

$$T_A \circ T_B(w) = T_A(B \cdot w) = A \cdot (B \cdot w) = (A \cdot B) \cdot w = w.$$

   Also ist $T_A \circ T_B = \mathrm{Id}_{K^n_{\mathrm{col}}}$ und aus (a) folgt, dass T_A und T_B invertierbar und die Inverse des jeweils anderen sind. In anderen Worten ist

$$B \cdot A = A \cdot B = I_n,$$

   also sind A und B und es gilt $B = A^{-1}$.

4. Betrachte $n \times n$-Matrizen A und B über K.

   (a) Zeige: Ist A oder B invertierbar, so sind AB und BA ähnlich.

   (b) Gilt die Folgerung auch ohne die Bedingung in (a)?

   Lösung: (a) Für A invertierbar ist $AB = A(BA)A^{-1}$ ähnlich zu BA, und für B invertierbar ist $BA = B(AB)B^{-1}$ ähnlich zu AB.

   (b) Für $A := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $B := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gilt $AB = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $BA = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Aber jede zur Nullmatrix O ähnliche Matrix UOU^{-1} ist wieder die Nullmatrix. Darum ist AB nicht ähnlich zu BA in diesem Fall.

5. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens, für welche Werte des Parameters α die folgende Matrix über $\mathbb{Q}$ invertierbar ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & -2\alpha \\ -6 & 2 & 1 & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

   Lösung: Das Gaußsche Eliminationsverfahren liefert die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 - \alpha \end{pmatrix},$$

   und diese ist genau dann invertierbar, wenn die ursprüngliche Matrix invertierbar ist. Aber eine Dreiecksmatrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Diagonaleinträge ungleich null sind. Es folgt, dass die Matrix der Aufgabe genau dann invertierbar ist, wenn für α gilt:

$$\alpha^2 - \alpha = \alpha(\alpha - 1) \neq 0.$$

   Dies ist äquivalent zu $\alpha \notin \{0, 1\}$.

6. Beweisen Sie den

   Satz. *(Bruhat-Zerlegung)* Für jede invertierbare Matrix A existieren eine Permutationsmatrix P, d.h. eine Matrix, die in jeder Zeile und jeder Spalte einen einzigen von Null verschiedenen Eintrag mit dem Wert 1 hat, und invertierbare obere Dreiecksmatrizen B und B', so dass gilt

$$A = BPB'.$$

   Hinweis: Wähle eine invertierbare obere Dreiecksmatrix U, so dass die Summe der Anzahlen der führenden Nullen in allen Zeilen der Matrix UA maximal ist.

Sodann finde eine Permutationsmatrix Q, so dass QUA eine invertierbare obere Dreiecksmatrix ist.

Die Linksmultiplikation einer Matrix A mit einer Permutationsmatrix P permutiert die Zeilen von A. Wenn zum Beispiel P an der Stelle (i, j) den Eintrag 1 hat, so ist die j–te Zeile von A gleich die i-te Zeile von PA.

Lösung: Für alle invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen U betrachten wir die Summe der Anzahlen der führenden Nullen aller Zeilen von UA. Diese Summe ist nach oben beschränkt. Daher können wir eine invertierbare obere Dreiecksmatrix U wählen, für welche diese Summe maximal ist. Dann behaupten wir:

Behauptung. Je zwei Zeilen der Matrix UA besitzen eine ungleiche Anzahl führender Nullen.

Beweis. Angenommen, dies wäre nicht der Fall für die i-te und j-te Zeile mit $i < j$. Dann haben die beiden Zeilen an der gleichen Stelle den ersten Wert, der nicht Null ist. Wir subtrahieren ein geeignetes Vielfaches der j-ten Zeile von der i-ten Zeile und erhalten in der i-ten Zeile mindestens eine führende Null mehr. Diese Zeilenoperation entspricht der Linksmultiplikation mit einer invertierbaren oberen Dreiecksmatrix der Form $T = I_m + \lambda E_{ij}$. Man beachte, dass sich die anderen Zeilen nicht verändert haben. Daher ist die Summe der Anzahlen der führenden Nullen aller Zeilen von TUA echt grösser als diejenige von UA. Weil TU auch eine invertierbare obere Dreiecksmatrix ist, ergibt dies einen Widerspruch zur Wahl von U. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Wegen der Behauptung können wir die Matrix UA durch eine geeignete Umordnung der Zeilen in eine obere Dreiecksmatrix B' überführen. Diese Umordnung der Zeilen entspricht der Linksmultiplikation mit einer Permutationsmatrix Q, also ist $QUA = B'$. Weil Q, U und A alle invertierbar sind, ist auch B' invertierbar. Die Inverse einer Permutationsmatrix ist wieder eine Permutationsmatrix und die Inverse einer invertierbaren oberen Dreiecksmatrix ist wieder eine invertierbare obere Dreiecksmatrix. Wir setzen $P := Q^{-1}$ und $B := U^{-1}$ und erhalten durch Linksmultiplikation mit P und B die Gleichung $A = BPB'$.

Single Choice Aufgaben. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) Die Basiswechselmatrix ist die Darstellungsmatrix der Identitätsabbildung bezüglich der entsprechenden Basen.

   (b) Jeder endlich dimensionale Vektorraum ist isomorph zu K^n für ein $n \geqslant 0$.

   ✓ (c) Der Rang jeder linearen Abbildung $f : K^n \to K^m$ ist mindestens $\min\{n, m\}$.

   (d) Die Darstellungsmatrix eines Isomorphismus ist invertierbar.

   Erklärung: Der Rang jeder linearen Abbildung $f\colon K^n \to K^m$ ist immer *höchstens* $\min\{n, m\}$; kann aber zum Beispiel auch 0 sein, darum ist (c) falsch.

2. Betrachte $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen reellen Vektorraum mit der geordneten Basis $\mathcal{B} := (1, i)$. Die Matrix $[\ldots]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist die Darstellungsmatrix bezüglich $\mathcal{B}$ der folgenden linearen Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

   (a) Die komplexe Konjugation $z \mapsto \bar{z}$

   (b) $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$

   (c) $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$

   ✓ (d) $z \mapsto iz$

   Erklärung: Ein Element $a + ib \in \mathbb{C}$ wird in der Basis $\mathcal{B}$ durch den Spaltenvektor $\binom{a}{b}$ dargestellt. Dieser wird durch die Matrix $[\ldots]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ auf den Vektor $\binom{-b}{a}$ abgebildet, welcher das Element $-b + ia = i(a + ib)$ darstellt.

3. Der Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}$ ist

   (a) 0

   ✓(b) 1

   (c) 2

   (d) 3

   Erklärung: Die Spalten der Matrix sind zwar ungleich null, aber linear abhängig, weil die zweite das dreifache der ersten ist. Daher ist der Rang gleich 1.

4. Für jede $n \times m$-Matrix A und jede invertierbare $n \times n$-Matrix B gilt

   (a) $\operatorname{rank}(BA) = \operatorname{rank}(B) \cdot \operatorname{rank}(A)$

   (b) $\operatorname{rank}(BA) = \operatorname{rank}(B) + \operatorname{rank}(A)$

   ✓(c) $\operatorname{rank}(BA) = \operatorname{rank}(A)$

   (d) $\operatorname{rank}(BA) = \operatorname{rank}(B)$

   Erklärung: Laut Lemma 3.4.2 aus der Vorlesung bleibt der Rang einer linearen Abbildung gleich, wenn man von links mit einem Isomorphismus verknüpft. In die Sprache der Matrizen übersetzt heisst das genau (c).

Multiple Choice Fragen.

1. Gegeben seien die folgenden geordneten Basen von $\mathbb{R}[x]_2$:

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2), \quad \mathcal{C} = (x^2, (x+1)^2, (x+2)^2)$$

Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $Q := [\mathrm{Id}_{\mathbb{R}[x]_2}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$.

(a) $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $Q = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

✓ (e) $Q = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(f) $Q = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Erklärung: Man löst das Gleichungssystem

$$p = ax^2 + b(x+1)^2 + c(x+2)^2 = (a+b+c)x^2 + (2b+4c)x + (b+4c)$$

für $p = 1, x, x^2$ unter Verwendung der Eindeutigkeit der Koeffizienten. Sei beispielsweise $p = 1$, dann folgt aus der Eindeutigkeit der Koeffizienten, dass

$$\begin{aligned} b + 4c &= 1 \\ 2b + 4c &= 0 \\ a + b + c &= 0 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $c = -\frac{1}{2}b$ und nach einsetzen in die erste Gleichung $b = -1$, und also $c = \frac{1}{2}$. Einsetzen in die dritte Gleichung impliziert dann $a = \frac{1}{2}$ und folglich

$$[1]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Da die Aufgabe richtig gestellt ist, ist man hier bereits fertig. Alternativ berechnet man $[x]_{\mathcal{C}}$, $[x^2]_{\mathcal{C}}$.

2. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ und $P \in \mathrm{GL}_n(K)$. Wir schreiben

$$r := \operatorname{rank}(A - I_n) \quad \text{und} \quad s := \operatorname{rank}(PAP^{-1} - I_n).$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

✓ (a) $r = s$;

(b) $r \neq s$;

(c) $r > s$;

(d) $r < s$;

✓ (e) Wenn $r < n$ ist, existiert $v \in V$, so dass $Av = v$ ist.