D–MATH

Prüfung Analysis I: eine Variable

401-1261-07L

Bitte noch nicht umblättern!

Rechnungen

Bei den Aufgaben 1-2 handelt es sich um Box-Aufgaben, das heisst Sie tragen Ihre Lösung und Begründung (falls gefragt) in die dafür vorgesehene(n) Box(en) ein. Ist Ihre Antwort richtig und Ihre Begründung (falls gefragt) zielführend, erhalten Sie die volle Punktzahl.

1. (a) [**2 Punkte**] Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 \frac{t}{t^2-9}dt$.
   (b) [**1 Punkte**] Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int x^2 e^{-x} dx$.
   (c) [**2 Punkte**] Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int (4-x^2)^{-3/2} dx$ auf $(-2,2)$.

2. (a) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ (bezüglich $z \in \mathbb{C}$) der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + n^3) z^n$.
   (b) i. [**1 Punkte**] Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $a_n = \frac{3n^2-n+3}{n^2+2}$ für $n \to \infty$.
   ii. [**2 Punkte**] Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $b_n = \frac{\ln(4n+1)}{\ln(n+2)}$ für $n \to \infty$.
   iii. [**2 Punkte**] Berechnen Sie den Limsup und den Liminf der Folge $c_n := a_n + (-1)^n b_n$.

3. [**4 Punkte**] Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ für $x > 0$.

   Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $u = y/x$.

4. [**4 Punkte**] Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion $f(x) = x^3(x-1)^2$ auf dem Intervall $[-1,1]$ und entscheiden Sie, ob es sich um lokale oder globale Maxima oder Minima handelt.

Theorie aus der Vorlesung

5. (a) [**2 Punkte**] Formulieren Sie den Satz von Rolle.
   (b) [**5 Punkte**] Beweisen Sie den Satz von Rolle.

6. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge.
   (a) [**2 Punkte**] Definieren Sie wann $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von A ist.
   (b) [**5 Punkte**] Angenommen A ist unendlich und beschränkt. Zeigen Sie, dass ein Häufungspunkt von A in $\mathbb{R}$ existiert.

Multiple-Choice

Sie müssen in jeder Aufgabe in diesem Teil vier Aussagen zu einem Thema beurteilen und als Wahr (also in jedem Fall zutreffend) oder Falsch (Gegenbeispiele existieren) kennzeichnen. Bei vier richtigen Antworten in der Aufgabe erhalten sie 3 Punkte für die Aufgabe, bei drei richtigen Antworten (und einer falsch beantworteten oder unbeantworteten Frage) 2 Punkte, und ansonsten 0 Punkte. Die **Fragen finden Sie auf dem Antwortblatt**, und dort müssen Sie auch Ihre Antwort machen, aber nicht begründen. Markieren Sie deutlich, welche der Aussagen **wahr** sind. Es können jeweils 0-4 Aussagen wahr sein.

Beweise und Anwendungen der Theorie

11. Sei $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Ein unendliches Produkt $\prod_{i=1}^{\infty} a_n$ wird *konvergent* genannt, wenn die Folge von Zahlen $\Pi_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$ einen endlichen Grenzwert Π ungleich Null besitzt. Wir setzen dann $\prod_{i=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \Pi_n = \Pi$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

    (a) [**3 Punkte**] Konvergiert ein unendliches Produkt $\prod_{i=1}^{\infty} a_n$, dann gilt $a_n \to 1$ für $n \to \infty$.

    (b) [**4 Punkte**] Wenn $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert das unendliche Produkt $\prod_{i=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \ln(a_n)$ konvergiert.

12. (a) [**5 Punkte**] Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

    - f_n ist differenzierbar und $|f_n'(x)| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$,
    - $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$.

    Zeigen Sie, dass f_n gleichmässig gegen eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert.

    (b) [**2 Punkte**] Gilt die obige Aussage auch, falls wir die obere Schranke für die Ableitungen durch $|f_n'(x)| \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$ ersetzen? Beweisen Sie dies oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.