D–MATH

Prüfung Analysis I: eine Variable

401-1261-07L

Wir bemerken, dass das Lösen von alten Prüfungen das Erlernen der Inhalte von Vorlesung und Übungen nicht ersetzten kann.

Bitte noch nicht umblättern!

1. Teil: Rechnungen

1. (a) [**2 Punkte**] Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int x^2 \cos x dx$.
   (b) [**2 Punkte**] Berechnen Sie das Integral $\int_1^4 \frac{\exp(\sqrt{t}+1)}{\sqrt{t}} dt$.
   (c) [**3 Punkte**] Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{1}{t^{2/3}+t^{1/2}} dt$ auf $\mathbb{R}_{>0}$.
2. (a) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie den Konvergenzradius (bezüglich $z \in \mathbb{C}$) der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n 2^n}{n!} z^n$.
   (b) [**3 Punkte**] Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right)^{(n+\sqrt{n})}$.
3. [**4 Punkte**] Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = xy^2 + x$, $y(0) = 1$.
4. [**4 Punkte**] Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}$.

2. Teil: Theorie aus der Vorlesung

5. [**7 Punkte**] Sei I ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Zeigen Sie, dass f Riemann-integrierbar ist.
6. [**7 Punkte**] Formulieren und beweisen Sie das Cauchy-Kriterium für reelle Folgen.

3. Teil: Multiple-Choice

Sie müssen in jeder Aufgabe in diesem Teil vier Aussagen zu einem Thema beurteilen und als Wahr (also in jedem Fall zutreffend) oder Falsch (Gegenbeispiele existieren) kennzeichnen. Bei vier richtigen Antworten in der Aufgabe erhalten sie 3 Punkte für die Aufgabe, bei drei richtigen Antworten (und einer falsch beantworteten oder unbeantworteten Frage) 2 Punkte, und ansonsten 0 Punkte. Sie müssen Ihre Antworten auf dem vorgegebenen Antwortblatt machen aber nicht begründen. Es können jeweils 0-4 Aussagen wahr sein.

7. [**3 Punkte**] Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $A \neq \emptyset$. Sei $-A = \{-x \in \mathbb{R} : x \in A\}$. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?
   (a) A ist unbeschränkt genau dann, wenn $\max(\sup A, \sup(-A)) = \infty$.
   (b) Falls A endlich ist, so ist $\max A = \sup A$.
   (c) Falls $\min A$ existiert, so ist $\min A = -\max(-A)$.
   (d) Falls A offen ist, so ist $\sup A \notin A$.
8. [**3 Punkte**] Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ und $z_n = r_n e^{i\theta_n}$, $z = re^{i\theta}$ mit $r_n, r \geq 0$ und $\theta_n, \theta \in [0, 2\pi)$. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?
   (a) Die Folge z_n konvergiert gegen z für $n \to \infty$ genau dann, wenn $\mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z)$ für $n \to \infty$.
   (b) Die Folge z_n konvergiert gegen z für $n \to \infty$ genau dann, wenn $r_n \to r$ und $\theta_n \to \theta$ für $n \to \infty$.
   (c) Falls $|z_n| \to |z|$ für $n \to \infty$, dann gilt $z_n \to z$ für $n \to \infty$.
   (d) Falls $z_n \to z$ für $n \to \infty$, dann gilt $|z_n| \to |z|$ für $n \to \infty$.

9. [**3 Punkte**] Sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $A_1, A_2 \subseteq X$, $B_1, B_2 \subseteq Y$ Teilmengen. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

   (a) Falls f surjektiv ist, so ist $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

   (b) Falls f surjektiv ist, so ist $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

   (c) Falls f injektiv ist, so ist $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

   (d) Falls f injektiv ist, so ist $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

10. [**3 Punkte**] Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

   (a) Falls f stetig ist, so ist f beschränkt.

   (b) Falls f stetig und injektiv ist, so ist f monoton.

   (c) Falls f stetig ist, so hat f eine Stammfunktion.

   (d) Falls f monoton ist, so hat f eine Stammfunktion.

4. Teil: Beweise und Anwendungen der Theorie

11. (a) [**5 Punkte**] Sei $I = (a, b)$ ein Intervall mit $a < b$ in $\overline{\mathbb{R}}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass falls die Ableitung von f beschränkt ist, dann ist f Lipschitz-stetig, dass heisst es existiert eine Konstante $c > 0$ mit $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ für alle $x, y \in I$.

    (b) [**2 Punkte**] Gilt die obige Aussage auch, falls der Definitionsbereich von f kein Intervall ist? Beweisen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

12. [**7 Punkte**] Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten $a < b$ in $\mathbb{R}$. Sei $f_n : I \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, sodass f_n punktweise gegen die Nullfunktion $f = 0$ konvergiert. Angenommen es gilt für alle $x \in I$,

$$n \geq m \implies f_n(x) \leq f_m(x).$$

Zeigen Sie, dass f_n gleichmässig gegen f konvergiert.

Hinweis: Argumentieren Sie indirekt.