Lösungen zur Übungsserie 1

Aufgabe 1. Sei $a > 0$. Die quadratische Ergänzung

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

führt auf die Lösung der quadratischen Gleichung, dient aber auch der Bestimmung des Minimums der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ auf $\mathbb{R}$.

(1) Zeigen Sie: f nimmt ihr Minimum $m = c - b^2/4a$ für $x = -b/2a$ an. Also, dass

$$f(x) \geq f(-b/2a) = m$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ (Ableiten nicht erwünscht).

(2) Finden Sie das Minimum der Funktion von zwei Variablen

$$f(x, y) = 2x^2 - 6xy + 9y^2 + 14x + y.$$

(Hinweis: Quadratische Ergänzung bezüglich x, dann bezüglich y).

Lösung.

(1) Weil $a > 0$ ist und weil das Quadrat einer reellen Zahl grösser oder gleich 0 ist, folgern wir, dass auch ihr Produkt grösser oder gleich 0 ist. Wir haben also

$$f(x) = ax^2 + bx + c = \underbrace{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} + c - \frac{b^2}{4a} \geq c - \frac{b^2}{4a} = m = f(-b/2a).$$

(2) Dem Hinweis folgend suchen wir die quadratische Ergänzung nach x:

$$f(x, y) = 2x^2 + (-6y + 14)x + 9y^2 + y = 2\left(x + \frac{7 - 3y}{2}\right)^2 + 9y^2 + y - 2\frac{(7 - 3y)^2}{4}.$$

Nach Teilaufgabe (a) hat f ein Minimum bei

$$x = \frac{3y - 7}{2}.$$

Wir haben das x in Abhängigkeit von y gefunden, welches $f(x, y)$ minimiert. Die quadratische Ergänzung nach y:

$$f(x, y) = 9y^2 + (-6x + 1)y + 2x^2 + 14x = 9\left(y + \frac{1 - 6x}{18}\right)^2 + 2x^2 + 14x - 9\frac{(1 - 6x)^2}{18^2}$$

führt uns nach Teilaufgabe (a) zur Bedingung

$$y = \frac{6x - 1}{18}.$$

Setzen wir die erste Bedingung in die zweite ein, erhalten wir

$$y = \frac{9y - 22}{18}.$$

Nach y aufgelöst finden wir $y = -\frac{22}{9}$ und darum $x = -\frac{43}{6}$. Das globale Minimum wird bei $(x, y) = (-\frac{43}{6}, -\frac{22}{9})$ angenommen und ist $f(x, y) = -\frac{925}{18}$.

$\square$

Aufgabe 2. Zeigen Sie per Induktion folgende Identitäten für ganze Zahlen $n \geq 1$:

(1) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

(2) $4^0 + 4^1 + 4^2 + \ldots + 4^n = \frac{4^{n+1}-1}{3}$,

(3) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$.

Lösung.

(1) Induktionsanfang $n = 1$: Direkt sehen wir $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Gleichung für n stimmt und zeigen dann die Aussage für $n + 1$.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n + 1) &\overset{\text{Annahme}}{=} \frac{n(n + 1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n(n + 1) + 2(n + 1)}{2} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}. \end{aligned}$$

(2) Induktionsanfang $n = 1$ Direkt sehen wir $4^0 = 1 = \frac{4^1-1}{3}$.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Gleichung für n stimmt und zeigen dann die Aussage für $n + 1$.

$$\begin{aligned} 4^0 + 4^1 + 4^2 + \ldots + 4^n + 4^{n+1} &\overset{\text{Annahme}}{=} \frac{4^{n+1} - 1}{3} + 4^{n+1} \\ &= \frac{4^{n+1} - 1 + 3 \cdot 4^{n+1}}{3} \\ &= \frac{(1 + 3)4^{n+1} - 1}{3} \\ &= \frac{4^{n+2} - 1}{3}. \end{aligned}$$

(3) Induktionsanfang $n = 1$: Direkt sehen wir $1 \cdot 1! = 1 = 2! - 1$.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Gleichung für n stimmt und zeigen dann die Aussage für $n + 1$.

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! + (n + 1) \cdot (n + 1)! &\overset{\text{Annahme}}{=} (n + 1)! - 1 + (n + 1) \cdot (n + 1)! \\ &= (1 + n + 1) \cdot (n + 1)! - 1 \\ &= (n + 2) \cdot (n + 1)! - 1 \\ &= (n + 2)! - 1. \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 3. Beweisen Sie durch Induktion:

(1) Jede ganze Zahl $n \geq 8$ kann als Summe geschrieben werden, wobei nur die Zahlen 3 und 5 verwendet werden dürfen.

(2) Jede ganze Zahl $n \geq 12$ kann als Summe geschrieben werden, wobei nur die Zahlen 3 und 7 verwendet werden dürfen.

Lösung.

(1) Induktionsanfang $n = 8$: Direkt sehen wir $8 = 3 + 5$.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Aussage für n stimmt und zeigen dann die Aussage für $n+1$. Wir wissen, dass die Zahl n als Summe von 3er und 5er geschrieben werden kann.
Falls 5 in dieser Summe vorkommt, können wir die 5 durch zwei 3er ersetzen, also $+5$ wird zu $+3+3$. Dann erhalten wir $n+1$ als Summe von nur 3er und 5er.
Falls 5 nicht in dieser Summe vorkommt, muss mindestens drei Mal eine 3 vorkommen (da $n \geq 8$). Dann können wir aber $+3+3+3$ durch $+5+5$ ersetzen und erhalten $n+1$ als Summe von nur 3er und 5er.

(2) Induktionsanfang $n = 12$: Direkt sehen wir $12 = 3 + 3 + 3 + 3$.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Aussage für n stimmt und zeigen dann die Aussage für $n+1$. Wir wissen, dass die Zahl n als Summe von 3er und 7er geschrieben werden kann.
Falls zwei Mal eine 3 in dieser Summe vorkommt, können wir diese zwei $3er$ durch eine 7 ersetzen, also $+3+3$ wird zu $+7$. Dann erhalten wir $n+1$ als Summe von nur 3er und 7er.
Falls höchstens eine 3 in dieser Summe vorkommt, muss mindestens zwei Mal eine 7 vorkommen (da $n \geq 12$). Dann können wir aber $+7+7$ durch $+3+3+3+3+3$ ersetzen und erhalten $n+1$ als Summe von nur 3er und 7er.

Alternativ kann man die Aussagen ohne Induktion beweisen: Wir bemerken für (a), dass

$$\begin{aligned} 8 &= 3 + 5 \\ 9 &= 3 + 3 + 3 \\ 10 &= 5 + 5 \end{aligned}$$

gilt. Jede Zahl $n \geq 8$ kann als $n = 3m - 1$, $n = 3m$, $n = 3m + 1$ für genau ein $m \geq 3$ geschrieben werden. Die Zahlen $8, 9, 10$ entsprechen $m = 1$. Wir finden eine explizite Dartellung, welche für $m \geq 1$ gilt

$$n = \begin{cases} 3 + 5 & +3 + \cdots + 3, \quad \text{falls } n = 3m - 1, \\ 3 + 3 + 3 & +3 + \cdots + 3, \quad \text{falls } n = 3m, \\ 5 + 5 & \underbrace{+3 + \cdots + 3}_{m-1 \text{ Mal}}, \quad \text{falls } n = 3m + 1. \end{cases}$$

$\square$

Aufgabe 4. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, derart dass

$$a \sim (a + 5) \qquad \text{und} \qquad a \sim (a + 8)$$

für alle $a \in \mathbb{N}$ gilt. Gilt $1 \sim 2$? Wie viele Elemente hat der Quotient $\mathbb{N}/\!\sim$?

Lösung. Wir zeigen zuerst, dass die Äquivalenzen $a \sim (a + 5)$ und $a \sim (a + 8)$ implizieren, dass $a \sim (a + 1)$ für alle $a \in \mathbb{N}$. In der Tat ist

$$a \sim (a + 8) \sim (a + 16) \sim (a + 11) \sim (a + 6) \sim (a + 1),$$

wobei wir die Symmetrie benutzt haben, um $(a + 5) \sim a$ für alle $a \in \mathbb{N}$ zu benutzen. Aus mehrfacher Anwendung der Transitivität folgt nun $a \sim (a + 1)$ für alle $a \in \mathbb{N}$.
Als nächstes folgern wir, dass $a \sim b$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$. Wegen der Symmetrie ist es genug zu zeigen, dass $a \sim b$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \leq b$. Für solche a und b gilt

$$a \sim (a + 1) \sim \ldots \sim (b - 1) \sim b.$$

Wieder mehrfache Nutzung der Transitivität gibt $a \sim b$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$.
Also sind alle Elemente aus $\mathbb{N}$ bezüglich dieser Äquivalenzrelation zueinander äquivalent, das heisst die Menge der Äquivalenzklassen $\mathbb{N}/\!\sim$ besteht nur aus einem Element.
□

Aufgabe 5. Zeichnen Sie V Punkte auf ein Blatt Papier. Verbinden Sie die Punkte durch genug Linien (welche sich nicht schneiden und verschiedene Anfangs- und Endpunkte haben), so dass Sie ein zusammenhängendes Bild erhalten. Das heisst, es gibt einen Weg von jedem Punkt zu jedem anderen Punkt entlang der eingezeichneten Linien. Sei E die Anzahl Linien und F die Anzahl Flächen, in welche die Linien Ihr Blatt Papier teilt. Berechnen Sie,

$$V - E + F$$

für verschiedene Beispiele und stellen Sie eine Vermutung auf. Beweisen Sie die Vermutung durch Induktion.

Lösung. Wir stellen fest, dass

$$V - E + F$$

immer gleich 2 ist! Dies gilt sogar für Bilder, bei denen Linien gleichen Anfangs- und Endpunkt haben.
Wir beweisen dies durch Induktion über die Anzahl Punkte V.

Induktionsanfang $V = 1$: Das Bild besitzt also nur einen Punkt in der Ebene. Falls wir keine Linie haben ist $V = 1, E = 0, F = 1$, welches die Behauptung erfüllt. Jede Linie, welche beim Punkt beginnt und wieder dort endet, teilt das Blatt in zwei Flächen. Wir folgern dass es bei E Linien $F = E + 1$ Flächen gibt. Wir berechnen $V - E + F = 2$.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Aussage für $V - 1$ stimmt und zeigen dann die Aussage für V. Sei G ein Bild mit $V \geq 2$ Punkten E Linien und F Flächen Da $V \geq 2$ und das Bild zusammenhängend sein sollte, gibt es mindestens eine Linie zwischen zwei verschiedenen Punkten. Seien A und B solche verschiedene Punkte. Tatsächlich kann es mehr als eine Linie zwischen A und B geben: wir bezeichen diese Linien $L_1, ..., L_n$. Wir bemerken,

dass die Linien $L_1, ..., L_n$ $n-1$ Flächen umschliessen (siehe Abb. 1).
Um Induktion anzuwenden, wollen wir ein Bild G' mit einem Punkt weniger haben, das

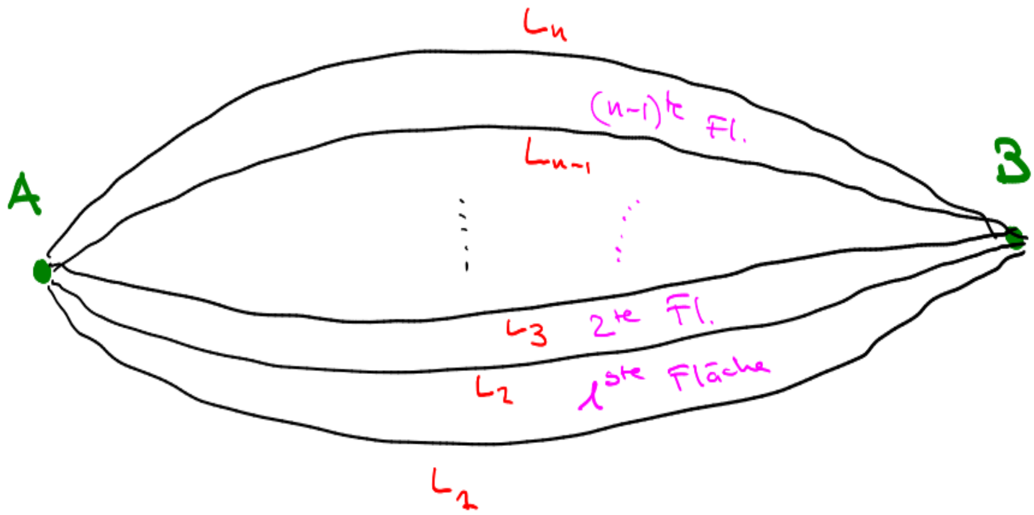


Abbildung 1

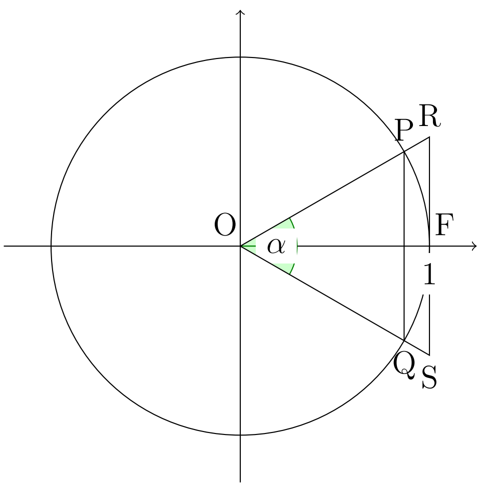
Bild sollte aber immer noch zusammenhängend sein. Dies können wir erhalten, indem wir die Linien $L_1, ..., L_n$ *kontrahieren*. Das heisst, wir ziehen A, B zu einem einzelnen Punkt AB zusammen. Das Bild G' hat dann $V' = V - 1$ Punkte, $E' = E - n$ Linien und $F' = F - (n-1)$ Flächen.
Wir erhalten

$$V - E + F = V - 1 - (E - n) + F - (n - 1) = 2.$$

□

Aufgabe 6. Archimedes-Algorithmus zur Berechnung von π.

(1) Drücken Sie den Flächeninhalt $d(\alpha)$, $D(\alpha)$ der gleichschenkligen Dreiecke OPQ und ORS mit Winkel α in O durch trigonometrische Funktionen aus. Die Seiten OP, OQ haben Länge 1 und ORS hat Höhe OF der Länge 1.



(2) Zeigen Sie, dass für $0 < 2\alpha < \pi$

$$2d(\alpha) = \sqrt{d(2\alpha)D(2\alpha)} \text{ und } \frac{1}{D(\alpha)} = \frac{1}{2d(\alpha)} + \frac{1}{D(2\alpha)}.$$

Erinnerung: $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$, $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

(3) Sei a_n der Flächeninhalt eines in einem Kreis von Radius 1 eingeschriebenen regulären n-seitigen Polygons, A_n der Flächeninhalt eines umgeschriebenen regulären n-seitigen Polygons. Zeigen Sie, dass

$$a_{2n} = \sqrt{a_n A_n}, \quad \frac{1}{A_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{2n}} + \frac{1}{A_n}\right).$$

(a_{2n} ist das geometrische Mittel von a_n und A_n; A_{2n} ist das harmonische Mittel von a_{2n} und A_n.)

(4) Berechnen Sie a_6, A_6 und verwenden Sie (3) um a_{12}, A_{12} zu berechnen. Schliessen Sie dass $3 < \pi < 12(2-\sqrt{3})$.

Bemerkung: Archimedes berechnete a_{96} und A_{96} und nach Approximation der Quadratwurzeln schloss, dass $223/71 < \pi < 22/7$. Er drückte a_{2n} durch a_n und A_{2n} durch A_n aus, mit etwas komplizieren Formeln (und ohne Trigonometrie). Siehe [**?**].

Lösung.

(1) Die Höhe des gleichschenkligen Dreieckes OPQ ist durch $h = \cos(\alpha/2)$ gegeben. Die Länge PQ ist gegeben durch $|PQ| = 2\sin(\alpha/2)$. Wir erhalten

$$d(\alpha) = \frac{|PQ|h}{2} = \sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2).$$

Wir können dies mit der ersten Additionsformel ($a = b = \alpha/2$) im Hinweis umschreiben als

$$d(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{2}.$$

Auf der anderen Seite ist die Höhe des gleichschenkligen Dreieckes ORS ist durch $H = 1$ gegeben. Die Länge RS ist gegeben durch $|RS| = 2\tan(\alpha/2)$. Wir erhalten

$$D(\alpha) = \frac{|RS|H}{2} = \tan(\alpha/2) = \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}.$$

(2) Wir berechnen

$$\sqrt{d(2\alpha)D(2\alpha)} = \sqrt{\sin(\alpha)\cos(\alpha)\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}} = \sin(\alpha) = 2d(\alpha)$$

sowie

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2d(\alpha)} + \frac{1}{D(2\alpha)} &= \frac{1}{\sin(\alpha)} + \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{1+\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\
&= \frac{1+\cos(\alpha/2)^2 - \sin(\alpha/2)^2}{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)} \\
&= \frac{2\cos(\alpha/2)^2}{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)} \\
&= \frac{2\cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} = \frac{1}{D(\alpha)}
\end{aligned}
$$

(3) Der Innenwinkel α eines n-seitigen regulären Polygons ist $\alpha_n = \frac{2\pi}{n}$. Bemerke, dass $\alpha_n = 2\alpha_{2n}$. Die totale Fläche der Polygone ist

$$a_n = nd(\alpha_n) \qquad \text{und} \qquad A_n = nD(\alpha_n).$$

Wir berechnen

$$\sqrt{a_n A_n} = n\sqrt{d(\alpha_n)D(\alpha_n)} = n\sqrt{d(2\alpha_{2n})D(2\alpha_{2n})} = 2nd(\alpha_{2n}) = a_{2n}.$$

Die zweite Identität erhalten wir wie folgt:

$$\frac{1}{a_{2n}} + \frac{1}{A_n} = \frac{1}{2nd(\alpha_{2n})} + \frac{1}{nD(\alpha_n)} = \frac{1}{2nd(\alpha_{2n})} + \frac{1}{nD(2\alpha_{2n})} = \frac{1}{nD(\alpha_{2n})} = \frac{2}{A_{2n}}.$$

(4) Laut hergeleiteten Formel sind

$$a_6 = 6d(\alpha_6) = 3\sin(\alpha_6) \qquad \text{und} \qquad A_6 = 6D(\alpha_6) = 6\tan(\alpha_6/2).$$

Mit $\alpha_6 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ erhalten wir

$$a_6 = 3\sin(\pi/3) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad \text{und} \qquad A_6 = 6D(\alpha_6) = \frac{6}{\sqrt{3}}.$$

Mit Teilaufgabe (c) folgt

$$a_{12} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{6}{\sqrt{3}}} = 3 \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{A_{12}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{1}{12(2-\sqrt{3})}.$$

$\square$