Lösungen zur Übungsserie 2

Aufgabe 1. Versuchen Sie Ihren Schreibstil zu üben. Um zum Beispiel die Regel $-0 = 0$ zu beweisen, wird etwa folgendes Argument erwartet:

> Das additive Inverse -0 von 0 muss nach Definition der Inversen die Eigenschaft $(-0) + 0 = 0 + (-0) = 0$ erfüllen. Da aber die Definition des neutralen Elementes besagt, dass $0 + 0 = 0 + 0 = 0$ gilt und weil die Inverse in einer Gruppe eindeutig ist, muss $-0 = 0$ gelten.

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die folgenden weiteren Rechenregeln:

(1) $-(x + y) = (-x) + (-y)$ (wobei wir für letzteres auch $= -x - y$ schreiben),
(2) $-(x - y) = -x + y$,
(3) $(-x)(-y) = xy$.
(4) Zeigen Sie, dass das Distributivgesetz für die Subtraktion $x(y - z) = xy - xz$ gilt.

Lösung.

(1) Wegen Assoziativität und Kommutativität der Addition ist $(x + y) + ((-x) + (-y))$ das gleiche wie $(x + (-x)) + (y + (-y)) = 0 + 0 = 0$. Aus der Eindeutigkeit der Inversen folgern wir $-(x + y) = (-x) + (-y)$.
(2) Das folgt direkt aus der vorherigen Teilaufgabe, wenn wir y durch $-y$ ersetzen, sowie der Folgerung (c) aus dem Skript, welches $-(-y) = y$ besagt.
(3) Folgerung (f) besagt $-x = (-1) \cdot x$. Wegen Assoziativität und Kommutativität der Multiplikation ist

$$(-x)(-y) = ((-1) \cdot x) \cdot ((-1) \cdot y) = ((-1) \cdot (-1)) \cdot (xy) = 1 \cdot (xy) = xy,$$

weil $(-1)(-1) = -(-1) = 1 ist$ (verwendet Folgerungen (f) und (c)).
(4) Dies folgt direkt aus dem Distributivgesetz (9) für $-z$ anstatt z:

$$x(y - z) = x(y + (-z)) = xy + x \cdot (-z) = xy + x \cdot ((-1) \cdot z) = xy + (-1)(xz) = xy - xz,$$

wobei wir wieder Assoziativität und Kommutativität der Multiplikation verwendet haben.

$\square$

Aufgabe 2. Sei $n, m \in \mathbb{N}$. Wir schreiben $n|m$ ("n teilt m") falls es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $m = kn$ gilt.

(1) Zeigen Sie dass $|$ eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ ist.
(2) Zeigen Sie dass $|$ keine Äquivalenzrelation ist.
(3) Ist $|$ eine lineare Ordnungsrelation?

Lösung.

(1) Wir zeigen, dass $|$ Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität erfüllt.

Reflexivität Wir zeigen zuerst, dass $|$ Reflexivität erfüllt. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Da $n = 1 \cdot n$ und $1 \in \mathbb{N}$, es folgt aus der Definition, dass $n|n$. Dies zeigt Reflexivität von $|$.

Antysimmetrie Wir zeigen jetzt, dass $|$ antisymmetrisch ist. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ sodass $n|m$ und $m|n$. Aus der Definition von $|$ folgt es, dass $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass

$$m = k_1 \cdot n \text{ und } n = k_2 \cdot m$$

Setzen wir die erste Bedingung in die zweite, erhalten with

$$n = k_1 \cdot k_2 \cdot n$$

Es folgt direkt $k_1 \cdot k_2 = 1$. Da $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, es folgt $k_1 = k_2 = 1$ und damit $n = m$. Dies zeigt Antisymmetrie von $|$.

Transitivität Schliesslich,, zeigen wir dass $|$ Transitivität erfüllt. Seien $n, m, l \in \mathbb{N}$ sodass $n|m$ und $m|l$. Wir zeigen $n|l$. Aus der Definition von $|$ es folgt, dass $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass

$$m = k_1 \cdot n \text{ und } l = k_2 \cdot m$$

Setzen wir die erste Bedingung in die zweite, erhalten with

$$l = k_1 \cdot k_2 \cdot n$$

Definiere $k := k_1 \cdot k_2$. Wir wissen $k \in \mathbb{N}$ und $m = k \cdot l$ Dies zeigt $l|k$ und damit die Behauptung.

(2) Wegen (1), $|$ ist eine Äquivalenzrelation, falls $|$ symmetrisch ist. Konkret dass heisst, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ so dass $n|m$, auch $m|n$ gelten soll. Ein Gegenbeispiel ist einfach $n = 2$ und $m = 4$.

(3) Wegen (1), $|$ ist eine lineare Ordnungsrelation, falls $|$ linear ist. Konkret dass heisst, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ entweder $n|m$ oder $m|n$ gelten soll. Ein Gegenbeispiel ist einfach $n = 2$ und $m = 3$.

$\square$

Aufgabe 3 (Bonuspunkte nur für (1), (2) und (3))**.** Sei $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Betrachte die Äquivalenzrelation $\sim_n$ auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, welche für $a, b \in \mathbb{Z}$ gegeben ist durch

$$a \sim_n b \text{ genau dann wenn } a - b \text{ ein Vielfaches von } n \text{ ist.}$$

Sei C_n die Menge der Äquivalenzklassen.

(1) Wie viele Elemente besitzt C_n?

(2) Für jede Zahl $a \in \mathbb{Z}$ sei $[a]_n \in C_n$ die dazugehörige Äquivalenzklasse. Zeige, dass $(C_n, +)$ eine Gruppe bildet, wobei die Addition zweier Klassen $[a]_n, [b]_n \in C_n$ definiert ist als

$$[a]_n + [b]_n := [a + b]_n.$$

(3) Sei $C_n^\times = C_n \setminus \{[0]_n\}$. Ist die Multiplikation $\cdot$ geerbt von der Multiplikation auf $\mathbb{Z}$

$$[a]_n \cdot [b]_n := [a \cdot b]_n$$

wohldefiniert?

(4*) Definiert $(C_n^\times, \cdot)$ eine Gruppe? Die Existenz der multiplikativen Inversen ist nicht ganz einfach. Googlen Sie nach dem erweiterten euklidischen Algorithmus.

(5*) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Betrachten Sie die Vorschrift $g_{n,m}^k : C_n \longrightarrow C_m$ gegeben durch $[a]_n \longmapsto [k \cdot a]_m$. Wann definiert diese Vorschrift eine wohldefinierte Abbildung $g_{n,m}^k$?

Lösung.

(1) Per Division mit Rest durch n kann jede Zahl $a \in \mathbb{Z}$ als $a = l \cdot n + a'$ mit $0 \leq a' \leq n-1$ und $l \in \mathbb{Z}$ geschrieben werden. Mit der Transitivität der Relation, gilt $a \sim_n a'$. Auf der anderen Seite ist für $a \neq b$ und $0 \leq a, b \leq n-1$ die Differenz $0 < |a - b| < n$ und darum $a \sim_n b$ nicht möglich. Wir können C_n also als $C_n = \{[0]_n, \dots, [n-1]_n\}$ schreiben, wobei kein Element gleich ist. Also hat C_n genau n Elemente.

(2) Wir zeigen zuerst, dass die Addition wohldefiniert ist: Falls $a \sim_n a'$ und $b \sim_n b'$, also $a - a' = l_a n$ und $b - b' = l_b n$ für $l_a, l_b \in \mathbb{Z}$, dann gilt

$$a + b = a' + b' + n(l_a + l_b)$$

und darum $(a + b) \sim_n (a' + b')$. Das neutrale Element der Gruppe ist $[0]_n \in C_n$ und das Inverse eines Elementes $[a]_n$ ist $[-a]_n$.

(3) Falls $n = 1$ ist folgt $C_1 = \{[0]_n\}$ eine triviale Gruppe mit einem Element. Doch dann ist $C_n^\times$ leer.

Falls $n > 1$ keine Primzahl ist können wir n als Produkt $n = ab$ zweier natürlichen Zahlen $0 \leq a, b \leq n-1$ schreiben. Dann ist die Multiplikation nicht wohldefiniert, da $[a]_n \cdot [b]_n = [n]_n = [0]_n$ gilt.

Falls $n > 1$ eine Primzahl ist, zeigen wir zuerst, dass die Multiplikation wohldefiniert ist: Falls $a \sim_n a'$ und $b \sim_n b'$, also $a - a' = l_a n$ und $b - b' = l_b n$ für $l_a, l_b \in \mathbb{Z}$, dann gilt

$$a \cdot b = a'b' + n(l_a b' + a' l_b + n l_a l_b)$$

und darum $(a+b) \sim_n (a'+b')$. Ausserdem ist $n = ab$ nicht möglich für $0 \leq a, b \leq n-1$ per Definition einer Primzahl. Das neutrale Element der Gruppe ist $[1]_n \in C_n$.

(4) Falls n eine Primzahl ist, finden wir für das Inverse eines Elementes $[a]_n$ das Element $[b]_n$, wobei b die Gleichung $ab + ny = 1$ erfüllt. Wir erhalten durch b, y durch Rücksubstitution im erweiterten euklidischen Algorithmus. Siehe: https://math.stackexchange.com/questions/747342/extended-euclidean-algorithm-for-modular-inverse

(5) Wir wollen, dass für alle $a, a' \in \mathbb{Z}$, dass aus $a \sim_n a'$ auch $ka \sim_m ka'$ folgt. Sei $l \in \mathbb{Z}$, so dass $a = a' + ln$. Dann ist $ka - ka' = kln$. Weil dies für beliebig mögliche l ein Vielfaches von m sein soll, muss kn ein Vielfaches von m sein, dass die Abbildung wohldefiniert ist.

$\square$

Aufgabe 4. Es bezeichne $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Ist die Menge $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ abzählbar? Begründen Sie.

Lösung. Ja!
Beweis Nr.1:
Wir konstruieren eine Injektive Abbildung $f : \mathcal{P}_0(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$. Sei $S \subseteq \mathbb{N}$ eine endliche Teilmenge. Wir schreiben $S = \{x_1, ..., x_k\}$ wobei $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_k$. Wir können S als eine endliche Folge $(b_1, ..., b_N)$ von 0s und 1s darstellen. Sei $n \in 1, 2, 3..., x_k \subseteq \mathbb{N}$: falls $n \in S$ dann setzen wir $b_n = 1$, und falls $n \notin S$ dann setzen wir $b_n = 0$. Wir nennen $(b_0, ..., b_N)$ die binäre Darstellung von S. Zum beispiel ist $S = 1, 2, 4, 6$ als $(1, 1, 0, 1, 0, 1)$ darstellbar.
Wir definieren $f(S)$ als die Natürliche Zahl, deren binäre Darstellung mit der binäre Darstellung von S überstimmt.
Beweis Nr.2:
Sei $A \in \mathcal{P}_0(\mathbb{N})$. Dann besteht A aus endlich viele natürliche Zahlen, und somit hat A ein Maximum $k \in A$. In Besonderen ist $A \subset \{1, \dots, k\}$, oder Äquivalent $A \in \mathcal{P}(\{1, \dots, k\})$. Damit ist

$$\mathcal{P}_0(\mathbb{N}) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathcal{P}(\{1, ..., k\}).$$

Bemerke, dass $|\mathcal{P}(\{1, \dots, k\})| = 2^k$ gilt. Da eine abzählbare Vereinigung von endliche Mengen abzählbar ist, dies zeigt die Behauptung.
Wir zeigen jetzt, dass eine abzählbare Vereinigung von *abzählbare* Mengen abzählbar ist. Das impliziert im Besonderen, dass eine abzählbare Vereinigung von endliche Mengen abzählbar ist.
Sei

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$$

wobei A_k abzählbar ist. Wir zeigen, dass A abzählbar ist. Da A_k abzählbar ist, es existiert eine bijektion $f_k : \mathbb{N} \to A_k$. Nenne $a_{k,n} := f_k(n)$: dann ist $A_k := \{a_{k,1}, a_{k,2}, ...\}$. Wir konstruieren eine bijektion $f : \mathbb{N} \to A$. Wir schreiben die Mengen A_k in Zeilen:

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \end{matrix}$$

und wir definieren $f(1) := a_{1,1}$, $f(2) := a_{2,1}$, $f(3) := a_{1,2}$, $f(4) := a_{1,3}$, $f(5) := a_{2,2}$, $f(6) := a_{3,1}$, $f(7) := a_{4,1}$ usw indem wir die Diagonale folgen.

□

Aufgabe 5. Sei K ein angeordneter Körper und seien $a, b \in K$ mit $b \neq 0$. Wir definieren

$$\frac{a}{b} := ab^{-1}$$

Seien nun $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $xyz > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Lösung. Wir haben $(x-y)^2 \geq 0$, $(y-z)^2 \geq 0$ und $(z-x)^2 \geq 0$. Somit gilt

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0.$$

Wir multiplizieren die Klammern aus und erhalten

$$x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2 \geq 0.$$

Umgeformt also

$$2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + zx).$$

Diese ungleichung ist äquivalent zu

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

Weil $xyz > 0$ ist, gilt auch $(xyz)^{-1} = \frac{1}{xyz} > 0$ und somit

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} \geq \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

□

Aufgabe 6. Sei K ein Körper un $L \subset K$ eine Teilmenge. Wir nennen L ein *Unterkörper* falls:

- $0_K, 1_K \in L$,
- $x + y, xy \in L$ falls $x, y \in L$,
- $-x \in L$, falls $x \in L$,
- $x^{-1} \in L$, falls $x \in L^\times = L \setminus \{0_K\}$.

Wir betrachten nun die Teilmenge $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

(1) Zeigen Sie dass L mit der Einschränkung auf $L \times L$ von $+$ und $\cdot$ ein Körper ist.
(2) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ der kleinste Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist, der $\mathbb{Q}$ und $\sqrt{2}$ enthält.
(3) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierte Operationen $+$ und $\cdot$ und der induzierten Ordnung $\leq$ ein angeordneter Körper ist, der jedoch nicht ordnungsvollständig ist.

Lösung.

(1) Wir zeigen, dass L ein Körper ist. Zuerst, es folgt von der Definition von Unterkörper, dass $+$ und $\cdot$ sind auf L wohldefiniert.

Nullelement: Definiere $0_L := 0_K$. Da L ein Unterkörper von K ist, gilt $0_L \in L$. Sei $x \in L$. Insbesondere ist $x \in K$, also es gilt

$$x + 0_L = x + 0_K = x = 0_K + x = 0_L + x$$

da K ein Körper ist.

Additives inverses: Sei $x \in L$. Da L ein Unterkörper von K ist, gilt $-x \in L$.

Assoziativgesetz für $+$: Seien $x, y, z \in L$. Insbesondere sind $x, y, z \in K$. Dann $(x + y) + z = x + (y + z)$ nach den Assoziativgesetz für K.

Kommutativgesetz für $+$: Gleiche Begründung als die Assoziativgesetz.

Einselelement: Definiere $1_L := 1_K$. Da L ein Unterkörper von K ist, gilt $1_L \in L$. Sei $x \in L$. Insbesondere ist $x \in K$, also es gilt

$$x \cdot 1_L = x \cdot 1_K = x = 1_K \cdot x = 1_L \cdot x$$

da K ein Körper ist.

Multiplikative Inverse: Sei $x \in L \setminus \{0_L\}$. Da L ein Unterkörper von K ist, gilt $x^{-1} \in L$.

Assoziativgesetz für $\cdot$: Seien $x, y, z \in L$. Insbesondere sind $x, y, z \in K$. Dann $(x \cdot y) + \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ nach den Assoziativgesetz für K.

Kommutativgesetz für $\cdot$: Gleiche Begründung als die Assoziativgesetz.

Distributivgesetz: Gleiche Begründung als die Assoziativgesetz.

Dies zeigt, dass L ein Körper ist.

(2) Wir beweisen zuerst nach, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist.

- Es gelten $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
- Seien $a + b\sqrt{2}, a' + b'\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Dann gelten

$$(a + b\sqrt{2}) + (a' + b'\sqrt{2}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$
$$(a + b\sqrt{2})(a' + b'\sqrt{2}) = (aa' + 2bb') + (ab' + ba')\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

- Sei $a+b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Dann ist
$$-(a+b\sqrt{2}) = (-a)+(-b)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$
- Sei $a+b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit $a+b\sqrt{2} \neq 0$. Wir behaupten, dass auch $a-b\sqrt{2} \neq 0$ gilt. Ansonsten müsste nämlich $b \neq 0$ sein und wir hätten $\sqrt{2} = ab^{-1} \in \mathbb{Q}$, im Widerspruch zu Lemma 2.35. Also können wir schreiben
$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a-b\sqrt{2}}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})} = \frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

[2mm] Dies zeigt, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein Unterkörper von $\mathbb{R}$. Es ist evident, dass $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Um zu zeigen, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ der kleinste Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist, der $\mathbb{Q}$ und $\sqrt{2}$ enthält, reicht es festzustellen, dass jeder Unterkörper L von $\mathbb{R}$, der $\mathbb{Q}$ und $\sqrt{2}$ enthält, aufgrund der Abgeschlossenheit unter Addition und Multiplikation notwendigerweise schon $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ enthält. Also ist $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ in jedem solchen Unterkörper L von $\mathbb{R}$ enhalten, und da $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ selbst schon ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist, ist es somit der kleinste mit dieser Eigenschaft.

(3) Die Körperaxiome (1)–(9) gelten für die auf $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ induzierten Operationen $+$ und $\cdot$, da sie in $\mathbb{R}$ gelten und $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ als Unterkörper von $\mathbb{R}$ die Elemente 0 und 1 von $\mathbb{R}$ enthält und abgeschlossen ist unter Addition, Multiplikation und (additiver und multiplikativer) Inversenbildung. Aus demselben Grund gelten die Axiome (10)–(15) für die induzierte Ordnung $\leq$. Somit ist $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit $\leq$ ein angeordneter Körper.

Um einzusehen, dass diese Ordnung jedoch nicht vollständig ist, wollen wir zeigen, dass $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Angenommen dies wäre doch der Fall. Dann könnten wir schreiben
$$\sqrt{3} = a+b\sqrt{2}$$
mit rationalen Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$. Quadrieren dieser Gleichung ergibt
$$3 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}. \tag{Eq.1}$$
Wir unterscheiden nun 3 Fälle:

(a) $a = 0$: Dann lautet obige Gleichung $3 = 2b^2$. Schreiben wir $b = p/q$ mit $p \in$ und $q \in \mathbb{N}$, so müsste also gelten $3q^2 = 2p^2$. Da der Primfaktor 2 in p^2 sicherlich in gerader Vielfachheit auftritt, müsste er in der linken Seite in ungerader Vielfachheit vorkommen. Dies ist aber nicht möglich, da er im Faktor 3 gar nicht und in q^2 in gerader Vielfachheit auftritt[1]. Dies ist ein Widerspruch.

(b) $b = 0$: Dann ist (Eq.1) äquivalent zu $3 = a^2$. Setzen wir $a = p/q$ mit $p \in$, $q \in \mathbb{N}$, so erhalten wir $3q^2 = p^2$, was einen Widerspruch diesmal durch Betrachten der Vielfachheit des Primfaktors 3 ergibt.

(c) $a \neq 0$ und $b \neq 0$: Dann können wir $\sqrt{2}$ aus (Eq.1) wie folgt ausdrücken:
$$\sqrt{2} = \frac{3-a^2-2b^2}{2ab}.$$

[1] Für eine Diskussion der Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung in $\mathbb{N}$ verweisen wir auf die angeleitete Übung 2.32 in Abschnitt 2.2.4 des Skripts.

Da $\sqrt{2}$ aber irrational ist, erhalten wir auch hier einen Widerspruch.
Es muss also tatsächlich $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ gelten.

Der Schluss, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ nicht ordnungsvollständig ist, verläuft analog zum Argument im Beweis von Lemma 2.30, wo gezeigt wird, dass aus $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ folgt, dass $\mathbb{Q}$ nicht ordnungsvollständig ist.

Dieses Argument basiert auf der Beobachtung, dass im Beweis der Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen über die Quadratwurzel nur die Axiome (1)–(16) benötigt werden (siehe Vorlesung bzw. Übung 2.11 im Skript). Wäre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ordnungsvollständig, so würden all diese Axiome auch in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ gelten, und somit hätte jedes nichtnegative Element von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ eine eindeutig bestimmte nichtnegative Quadratwurzel in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Insbesondere gäbe es $c \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit $0 \leq c$ und $c^2 = 3$. Dann läge c aber auch in $\mathbb{R}$ und die Eindeutigkeit von $\sqrt{3}$ in $\mathbb{R}$ würde $\sqrt{3} = c \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ implizieren. Dass dies nicht der Fall sein kann, haben wir aber oben schon bewiesen.

$\square$

Aufgabe 7. Multiple choice Fragen.

(1) Es existiert eine surjektive Abbildung $f : P \to \mathbb{Z}$, wobei

$$P := \{2n : \ n \in \mathbb{N}\}$$

die Menge aller geraden Zahlen bezeichnet.

(a) Wahr

(b) Falsch

Lösung. Zum Beispiel

$$f(2n) := \begin{cases} n, \text{ falls } n \text{ gerade} \\ \frac{-n+1}{2}, \text{ falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Wir zeigen, dass f surjektiv ist. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Falls $k = 0$ ist $k = f(2)$; falls $k > 0$ ist $k = f(2k)$ und falls $k < 0$ ist $k = f(-4k + 2)$. $\square$

(2) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist mit der üblichen Addition und Multiplikation kein Körper?

(a) $\mathbb{Q}$

(b) $\{-1, 0, 1\}$

(c) $\{a + b\sqrt{3} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$

(d) $\mathbb{R}$

Lösung. $+$ ist nicht wohldefiniert, da $1 + 1 = 2$. $\square$

(3) Sei X eine Menge mit $|X| \geq 2$. Die Relation $\subseteq$ auf $\mathcal{P}(X)$ ist ...

(a) ... eine Äquivalenzrelation,

(b) ... eine lineare Ordnungsrelation,

(c) ... eine Ordnungsrelation, die nicht linear ist,

(d) ... keins der Obigen.

Lösung. Wir zeigen, dass $\subseteq$ eine Ordnungsrelation ist.

Reflexivität Sei $Y \subseteq X$: es ist klar, dass $Y \subseteq Y$ ist, da $Y = Y$.

Antisymmetrie Seien $Y, Z \subseteq X$ so dass $Y \subseteq Z$ und $Z \subseteq Y$. Dann gilt $Z = Y$ wegen der zweiten Annahme der naiven Mengenlehre (S.17 im Skript).

Transitivität Seien $Y, Z, W \subseteq X$ so dass $Y \subseteq Z$ und $Z \subseteq W$. Sei $y \in Y$ beliebig, dann nach Annahme $y \in Z$. Aber dann, $y \in W$. Dies zeigt $Y \subseteq W$

Wir zeigen, dass $\subseteq$ nicht linear ist: sei $X = \mathbb{R}$, $Y = \{1\}$ und $Z = \{3\}$. Da $1 \neq 3$, weder $Y \subset Z$ noch $Z \subseteq Y$ gilt.

Wir zeigen, dass $\subseteq$ nicht symmetrisch ist: sei $X = \mathbb{R}$, $Y = \{1\}$ und $Z = \{1, 2\}$. Da $1 \in Z$ ist dann $Y \subseteq Z$. Anderseits ist $2 \notin Y$, so $Z \subseteq Y$ gilt nicht. $\square$

(4) Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen. Wir sagen, dass $x_0 \in \mathbb{R}$ ein *Maximum* von X ist, falls $x_0 \in X$ und $x \leq x_0$ für alle $x \in X$ gilt. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ besitzen ein Maximum?

(a) $X_1 := \{x \in \mathbb{R} \,|\ x < 0\}$,

(b) $X_2 := \{x \in \mathbb{Q} \,|\ x < 0\}$,

(c) $X_3 := \{x \in \mathbb{Z} \,|\ x < 0\}$,

(d) keins der Obigen.

Lösung.

(a) Wir nehmen an, dass $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Maximum von X_1 ist und wir suchen ein Wiederspruch. Definiere $x_1 := x_0 - \frac{x_0}{2}$. Da $x_0 < 0$ ist, ist auch $x_1 < 0$, i.e. $x_1 \in X_1$, und ausserdem $x_0 < x_1$: Wiederspruch.

(b) Genau wie oben.

(c) $x_0 = -1$ ist ein Maximum von X_3.

$\square$

(5) Welche Aussage gilt für alle angeordneten Körper K und alle $x, y \in K$?

(a) Ist $x \geq 0$ so gibt es ein $z \in K$ so dass $z^2 = x$.

(b) Aus $x^2 \geq y^2$ folgt $x \geq y$.

(c) Ist $x \neq 1$ so gibt es genau ein $z \in K$ so dass $x = \frac{z-1}{z+1}$.

(d) Falls $x, y \neq 0$ und $x \leq y$ dann $1/x \geq 1/y$.

Lösung.

(a) Gegenbeispiel: $K = \mathbb{Q}$, $x = 2$.

(b) Gegenbeispiel: $K = \mathbb{R}$, $x = -1$ und $y = 1$.

(c) Wahr

(d) Gegenbeispiel: $K = \mathbb{R}$, $x = -1$ und $y = 1$.

$\square$