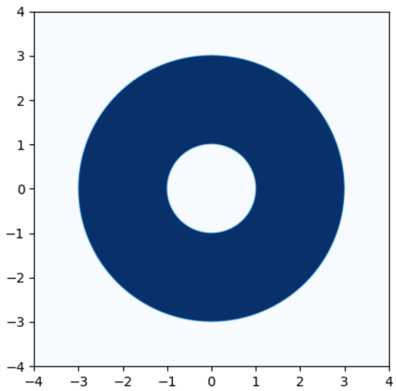
Lösungen zur Übungsserie 3

Aufgabe 1. Zeichnen Sie folgende Teilmengen der komplexen Ebene.

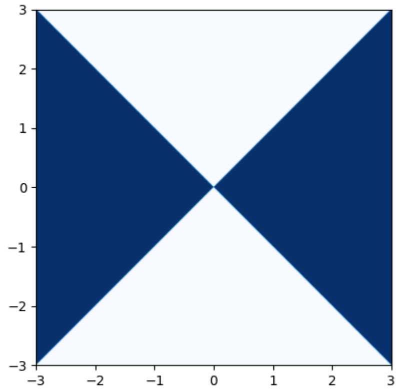
(1) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 1 \leq |z| \leq 3\}$
(2) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z^2) \geq 0\}$
(3) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| \leq 3,\ |z| \leq 3,\ |z-i| \leq 3\}$
(4) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z+1) = \mathrm{Re}(z+iz),\ |z| \leq 2\}$
(5) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, z \neq 1,\ |\frac{z}{z-1}| \leq 1\}$
(6) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| + |z+1| \leq 4\}$

Lösung. Sei $z = a + ib$ wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

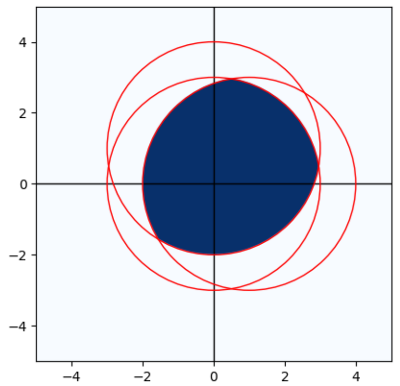
(1) $|z|^2 = a^2 + b^2$. Somit ist $1 \leq |z| \leq 3$ äquivalent zu $1 \leq a^2 + b^2 \leq 3^2$, also ein durch zwei Kreise beschränktes Gebiet, ein Kreisring.



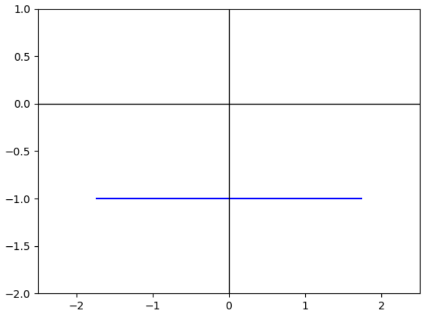
(2) $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. Wir haben, dass $Re(z^2) \geq 0$ genau dann, wenn $a^2 - b^2 \geq 0$. Also $a^2 \geq b^2$.



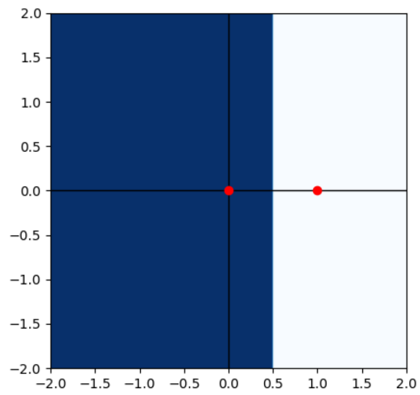
(3) $|z-1| \leq 3$, $|z| \leq 3$ und $|z-i| \leq 3$ sind drei Kreisscheiben mit Mittelpunkte $1 = (1,0)$, $0 = (0,0)$ und $i = (0,1)$. Somit ist die gesuchte Teilmenge der Schnitt dieser drei Kreisscheiben.



(4) $z + iz = a + ib + ia - b$. Somit gilt $Re(z+iz) = a - b$ und $Re(z+1) = a + 1$. Wir haben $a + 1 = a - b$, das heisst $b = -1$. Da ausserdem $|z| \leq 2$ ist, folgt $a^2 + b^2 \leq 4$, also $a^2 + 1 \leq 4$, was äquivalent zu $|a| \leq \sqrt{3}$ ist.



(5) Die Gleichung $|z| \leq |z-1|$ bedeutet, dass wir Punkte suchen, welche näher bei $0 = (0,0)$ sind als bei $1 = (1,0)$. Die Mittelsenkrechte $\{(\frac{1}{2}, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ zwischen diesen Punkten ist also der Rand, welcher die gesuchte Teilmenge begrenzt.



(6) Wir quadrieren die Gleichung

$$4 - |z-1| = |z+1|$$

und erhalten

$$16 - 8\sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2} + x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2.$$

Also

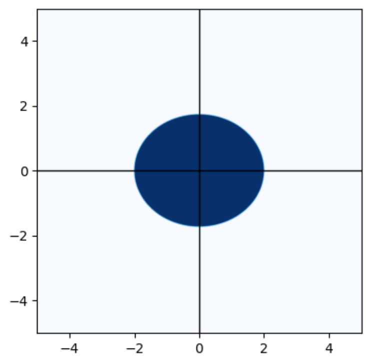
$$16 - 4x = 8\sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2}.$$

Nachdem wir durch 4 dividieren und erneut quadrieren, erhalten wir

$$16 - 8x + x^2 = 4(x^2 - 2x + 1 + y^2).$$

Nach Umschreiben beschreibt dies eine Ellipse mit Mittelpunkt $(0,0)$, horizontalem Radius 2 und vertikalem Radius $\sqrt{3}$:

$$12 = 3x^2 + 4y^2$$



$\square$

Aufgabe 2. (1) Finden Sie eine lineare Ordnungsrelation $\leq$ auf $\mathbb{C}$ so dass:

(a) $z \leq w \implies z + u \leq w + u$ für alle $z, w, u \in \mathbb{C}$.

(b) $0 \leq x$ und $0 \leq z \implies 0 \leq xz$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$

(2) Zeigen Sie dass es keine lineare Ordnungsrelation auf $\mathbb{C}$ gibt, die $\mathbb{C}$ zu einem angeordneten Körper macht.

Hinweis: Zeigen Sie dass $-1 < 0 < 1$ in jedem angeordenten Körper gilt.

Lösung.

(1) Wir definieren die folgende Relation auf $\mathbb{C}$. Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Wir schreiben $z \leq w$ falls

$$\mathrm{Re}(z) < \mathrm{Re}(w) \text{ oder } \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w) \text{ und } \mathrm{Im}(z) \leq \mathrm{Im}(w)$$

(Dies ist die sogenannte lexikografische Ordnung). Wir behaupten, dass $\leq$ eine lineare Ordnungsrelation auf $\mathbb{C}$ ist. Seien $z = a_0 + b_0 i$, $w = a_1 + b_1 i$, $u = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$.

Reflexivität Das ist klar.

Antisymmetrie Nehme an, dass $z \leq w$ und $w \leq z$ gilt. Wir zeigen $z = w$. Aus $z \leq w$ und der Definition von $\leq$ auf $\mathbb{C}$ folgt es, dass $a_0 \leq a_1$ gilt. Anderseits folgt aus $z \leq w$, dass $a_1 \leq a_0$ gilt. Somit ist $a_0 = a_1$. Aus der gleichen Überlegung ergibt sich, dass $b_0 = b_1$. Dies zeigt $z = w$.

Transitivität Nehme an, dass $z \leq w$ und $w \leq u$ gilt. Wir zeigen $z \leq u$. Aus der Definition von $\leq$ haben wir $a_0 \leq a_1 \leq a_2$. Falls $a_0 < a_1$ oder $a_1 < a_2$, dann $a_0 < a_2$ und somit $z \leq u$. Falls $a_0 = a_1 = a_2$, dann folgt aus der Definition von $\leq$, dass $b_0 \leq b_1$ und $b_1 \leq b_2$ gilt. Insbesondere $b_0 \leq b_2$ und somit $z \leq u$.

Linearität Gegeben z, w, wir zeigen, dass mindestens $z \leq w$ oder $w \leq z$ gelten soll. Falls $a_0 < a_1$, dann $z \leq w$; falls $a_1 < a_0$, dann $w \leq w$. Falls $a_0 = a_1$ wir konzentrieren auf die b_i's: falls $b_0 \leq b_1$, dann $z \leq w$; falls $b_1 \leq b_0$, dann $w \leq z$.

Wir zeigen jetzt, dass $\leq$ Eigenschaften (a) und (b) erfüllt. Bemerke, dass $z + u = (a_0 + a_2) + (b_0 + b_2)i$ und $w + u = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

(a) Nehme an, dass $z \leq w$ gilt. Wir haben zwei Fälle:
- $a_0 < a_1$: nach Addition von a_2 haben wir $a_0 + a_2 < a_1 + a_2$ und somit $z + u \leq$;
- $a_0 < a_1$: in diesem Fall muss $b_0 \leq b_1$ gelten. Nach Addition mit b_2 erhalten wir $b_0 + b_2 \leq b_1 + b_2$ und somit $z + u \leq w + u$.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$ positiv und nehme an, dass $0 \leq z$ gilt. Bemerke, dass $xz = xa_0 + xb_0 i$. Wir haben zwei Fälle:
- $a_0 = 0$: in diesem Fall $0 \leq b_0$. Bemerke, dass $xa_0 = 0$ und $0 \leq xb_0$ gelten muss, somit $0 \leq xz$;
- $0 \leq a_0$: in diesem Fall $0 \leq xa_0$ und somit $0 \leq xz$.

(2) Wir zeigen zuerst, dass falls $\leq$ die oben definierte Relation bezeichnet, dann ist $(\mathbb{C}, \leq)$ **kein** angeordneten Körper. Seien $z = w = i$. Bemerke, dass $0 \leq i$, da $0 < 1$. Falls $(\mathbb{C}, \leq)$ ein angeordneter Körper wäre, dann sollte aus Axiom 15 (auf Seite 77 in Skript) $0 < i^2$ gelten, aber $i^2 = -1$ und $-1 < 0$, und dies impliziert $i^2 < 0$. Das ist ein Widerspruch zur Definition von angeordneten Körper.

Sei jetzt $\leq$ eine beliebige lineare Ordnungrelation auf $\mathbb{C}$ (i.e. nicht zwingend die obige Relation). Wir zeigen, dass $(\mathbb{C}, \leq)$ **kein** angeordneten Körper ist. Wir folgen dem Hinweis und beweisen das folgende Lemma:

Lemma. Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Dann $-1_K < 0_K < 1_K$.

Beweis. Nach Linearität von $\leq$ (Axiom 13, S.77) erhalten wir folgende Fälle:

(a) $0 \leq 1$ und $0 \leq -1$. Wir benutzen Axiom 14 mit $x = 0$, $y = 1$ und $z = -1$ und erhalten $-1 \leq 0$, ein Widerspruch.

(b) $1 \leq 0$ und $-1 \leq 0$. Wir benutzen Axiom 14 mit $x = -1$, $y = 0$ und $z = 1$ und erhalten $0 \leq 1$, ein Widerspruch.

(c) $1 \leq 0 \leq -1$. Wir benutztn Axiom 15 mit $x = y = -1$ und erhalten $0 \leq (-1)^2 = 1$, ein Widerspruch.

(d) $-1 \leq 0 \leq 1$. Dies ist die einzige verbleibende Möglichkeit.

Dies beweist das Lemma, da $0_K \neq 1_K$ (Axiom 5 in der Definition von Körper, S.73 im Skript). □

Wir nehmen an, dass $(\mathbb{C}, \leq)$ angeordnet ist. Wir betrachten $0, i \in \mathbb{C}$. Nach Linearität von $\leq$ (Axiom 13) haben wir zwei Fälle:

(a) $0 \leq i$. Nach Axiom 15 erhalten wir (mit $x = y = i$) $0 \leq i^2 = -1$. Das ist ein Widerspruch zum obigen Lemma.

(b) $i \leq 0$. Nach Axiom 14 erhalten wir (mit $x = i$, $y = 0$, $z = -i$) $0 \leq -i$. Aber dann $0 \leq (-i)^2 = -1$ nach Axiom 15.

Wir haben gezeigt, dass $(\mathbb{C}, \leq)$ kein angeordneten Körper sein kann.

□

Aufgabe 3. Folgern Sie aus Satz 2.15 oder aus Satz 2.19 im Skript die folgenden Varianten der vollständigen Induktion.
Sei hierzu $A(n)$ eine beliebige Aussage über natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$.

(1) Angenommen die Aussagen
  (a) (Induktionsanfang) $A(1)$ und $A(2)$,
  (b) (Induktionsschritt) $\forall n \in \mathbb{N} : \ (A(n) \wedge A(n+1) \Rightarrow A(n+2))$,

  gelten, dann gilt ebenso $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2) Falls für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ die Aussagen
  (a) (Induktionsanfang) $A(n_0)$,
  (b) (Induktionsschritt) $\forall n \in \mathbb{N} : \ ((n \geq n_0 \wedge A(n)) \Rightarrow A(n+1))$

  gelten, dann gilt auch $A(n)$ für alle natürliche Zahlen $n \geq n_0$.

Lösung.

(1) Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $B(n)$ als $A(n) \wedge A(n+1)$. Es gilt $B(1)$, da nach (a) $A(1)$ und $A(2)$. Sei $n \in \mathbb{N}$ so dass $B(n)$, dann $A(n+2)$ nach (b). Es folgt, dass $B(n)$ $B(n+1)$ impliziert, da $A(n+1)$ nach Annahme. Nach Satz 2.15 ist dann $B(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$; insbesondere ist dann $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2) Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $C(n)$ als $A(n_0 + n - 1)$. Es gilt $C(1)$, da nach (a) $A(n_0)$. Bemerke: für $n \in \mathbb{N}$ so dass $n > 1$ gilt $n_0 + n - 1 \geq n_0$. Dies impliziert insbesondere, dass $C(n)$ $C(n+1)$ impliziert. Nach Satz 2.15 ist dann $C(n)$ dür alle $n \in \mathbb{N}$, oder äquivalent $A(n)$ für alle $n \geq n_0$.

□

Aufgabe 4 (Anwendung von Aufgabe 3)**.** Die Fibonacci-Zahlen $f_0, f_1, f_2, \ldots$ sind durch

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \text{ für } n \geq 1$$

rekursiv definiert.

(1) Beweisen Sie die Identität

$$f_{m+n} = f_m f_{n+1} + f_{m-1} f_n$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

(2) Beweisen Sie: Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ ist f_{kn} ein Vielfaches von f_n.

(3) Beweisen Sie: Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $f_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n$ für alle $n \geq n_0$.

Lösung.

(1) Für jedes festes $n \in \mathbb{N}$ wird die Identität als eine Aussage $A(m)$ über m per Induktion bewiesen. Wir zeigen zuerst $A(m)$ für $m = 1, 2$. Für $m = 1$ stimmt die Aussage $f_{n+1} = f_1 f_{n+1} + f_0 f_n$, da $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$. Da $f_2 = 0 + 1 = 1$ ist $A(2)$ die Rekursionsformel für Fibonacci-Zahlen: $f_{n+2} = f_2 f_{n+1} + f_1 f_n = f_{n+1} + f_n$. Wenn $A(m)$ und $A(m-1)$ gelten, dann

$$\begin{aligned} f_{m+1+n} &= f_{m+n} + f_{m+n-1} \\ &= (f_m f_{n+1} + f_{m-1} f_n) + (f_{m-1} f_{n+1} + f_{m-2} f_n) \\ &= (f_m + f_{m-1}) f_{n+1} + (f_{m-1} + f_{m-2}) f_n \\ &= f_{m+1} f_{n+1} + f_m f_n. \end{aligned}$$

Also gilt $A(m+1)$.

(2) Der Beweis ist mit Induktion in n bei festem, beliebigem $k \in \mathbb{N}$. Für $n = 1$ gilt die Behauptung, da $f_k = 1 f_k$ ein Vielfaches von f_k ist. Nehmen wir induktiv an, dass f_{kn} ein Vielfaches von f_k ist, also dass es ein $g_n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $f_{kn} = g_n f_k$. Der Induktionsschritt folgt unter Verwendung der vorherigen Identität nach Ersetzung von m, n durch k, kn:

$$f_{k(n+1)} = f_{k+kn} = f_k f_{kn+1} + f_{k-1} f_{kn} = f_k (f_{kn+1} + f_{k-1} g_n),$$

Also folgt aus der Induktionsannahme dass $f_{k(n+1)}$ ein Vielfaches von f_k ist.

(3) Mit einem Taschenrechner oder durch expliziter Rechnung sehen wir dass $f_{12} = 144 = 2^4 3^2 > (3/2)^{12}$. Wir setzen also $n_0 = 12$. Sei $a = 3/2$ und $A(n)$ die Aussage

$$\forall k \in \mathbb{N} : n_0 \leq k \leq n \Rightarrow f_k > a^k.$$

Sie gilt für $n = n_0$. Wenn $A(n)$ gilt, dann

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} > a^n + a^{n-1} = a^{n+1}(a^{-1} + a^{-2}) > a^{n+1},$$

da $a^{-1} + a^{-2} = 2/3 + 4/9 = 10/9 > 1$. Somit gilt $A(n+1)$.

Bemerkung: der Induktionsschritt gilt für jede positive Zahl a so dass $a^{-1} + a^{-2} > 1$, also wenn $0 < a < (1 + \sqrt{5})/2$. Ein n_0 existiert auch in diesem allgemeineren Fall, wie man mit der Binet-Formel (S. Wikipedia) zeigen kann.

□

Aufgabe 5. Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Zeigen Sie, dass

$$x \leq y \iff x^3 + x \leq y^3 + y$$

für alle $x, y \in K$ gilt.

Lösung. Wir werden Folgerung (w) aus dem Skript auf Seite 78 benutzen. Also

$$0 \leq x \leq y, \qquad 0 \leq z \leq w \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leq xz \leq yw.$$

Dies folgt aus Folgerung (t), i.e.

$$0 \leq x, \qquad y \leq z \qquad \Rightarrow \qquad xy \leq xz,$$

weil aus $0 \leq z, x \leq y$ die Ungleichung $xz \leq yz$ folgt, aus $0 \leq y, z \leq w$ die Ungleichung $yz \leq yw$ folgt und wir dann die Transitivität der Ordnung benutzen können.

Nun zur eigentlichen Aufgabe:
$\Rightarrow$: Wir nehmen $x \leq y$ an und beweisen $x^3 + x \leq y^3 + y$.

$0 \leq x$: Dann folgt aus $0 \leq x \leq y$ und mehrfachem Anwenden von Folgerung (w) aus dem Skript, dass $x^n \leq y^n$ für alle n. Mit Folgerung (o) aus dem Skript können wir Ungleichungen addieren. Also $x \leq y$ und $x^3 \leq y^3$ implizieren zusammen $x^3 + x \leq y^3 + y$.
$y \leq 0$: Wir führen diesen Fall auf den vorherigen zurück. Aus $x \leq y$ und $y \leq 0$ haben $0 \leq -y \leq -x$. Der vorherige Fall impliziert $-y^3 - y = (-y)^3 - y \leq (-x)^3 - x = -x^3 - x$, also $x^3 + x \leq y^3 + y$.
$x \leq 0 \leq y$: In diesem Fall ist $x^3 \leq 0$ und $0 \leq y^3$. Also bekommen wir die gewünschte Ungleichung, wenn wir die Ungleichungen $x^3 \leq y^3$ und $x \leq y$ addieren.

$\Leftarrow$: Wir nehmen $x^3 + x \leq y^3 + y$ an und beweisen $x \leq y$.
Falls $x > y$ wäre, könnten wir wie oben herleiten, dass $x^3 + x > y^3 + y$, was ein Widerspruch zur Annahme ist.

$\square$

Aufgabe 6. Wir betrachten die komplexen Zahlen $z = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$ und $w = \frac{1}{\sqrt{10}}(3 + i)$. Überprüfen Sie dass $|z| = 1$ und $|w| = 1$ gilt, und zeichnen Sie die ungefähre Position von z und w in der komplexen Ebene.

(1) Mit Maschinenhilfe, berechnen Sie $z, z^2, z^3, z^4, \ldots$ sowie $w, w^2, w^3, w^4, \ldots$ und zeichnen diese Punkte in der komplexen Ebene.
(2) Berechnen Sie z^n für alle $n \in \mathbb{Z}$. Formulieren Sie eine Vermutung über die Menge $\{w^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ und beweisen Sie davon was Sie können.

Lösung. Die beiden Zahlen sind von Betrag 1, da $|z| = \sqrt{\frac{1}{4}(1+3)} = 1$ und $|w| = \sqrt{\frac{1}{10}(9+1)} = 1$.

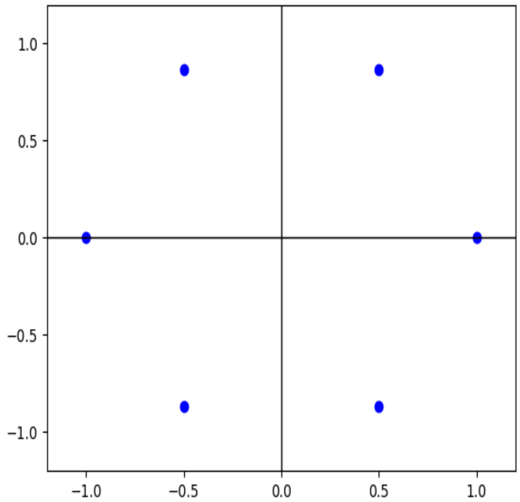
(1) Mit Maschinenhilfe berechnen wir

$$
\begin{aligned}
z^2 &= \tfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}) \\
z^3 &= -1 \\
z^4 &= \tfrac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}) \\
z^5 &= \tfrac{1}{2}(1-i\sqrt{3}) \\
z^6 &= 1 \\
z^7 &= \tfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}) = z
\end{aligned}
$$

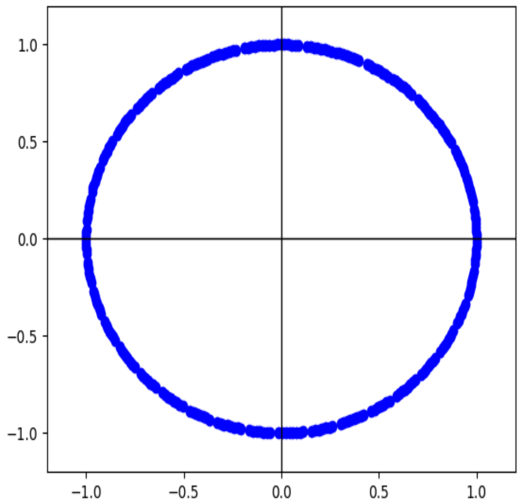
und

$$
\begin{aligned}
w^2 &= \tfrac{1}{5}(4+3i) \\
w^3 &= \tfrac{\sqrt{10}}{50}(9+13i) \\
w^4 &= \tfrac{1}{25}(7+24i) \\
w^5 &= \tfrac{\sqrt{10}}{250}(-3+79i) \\
w^6 &= \tfrac{1}{125}(-44+117i) \\
w^7 &= \tfrac{\sqrt{10}}{1250}(-249+307i) \\
w^8 &= \tfrac{1}{625}(-527+336i) \\
\ldots &\quad .
\end{aligned}
$$

Die Punkte z,z^2,... in der komplexen Ebene sind:



Die Punkte w,w^2,... in der komplexen Ebene sind:



(2) Weil $z^6 = 1$ gilt, dann haben wir

$$z^n = \begin{cases} 1, \ n = 6k \\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i), \ n = 6k+1 \\ \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}), \ n = 6k+2 \\ -1, \ n = 6k+3 \\ \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}), \ n = 6k+4 \\ \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}), \ n = 6k+5. \end{cases}$$

Vermutung: Die Menge $W = \{w^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ liegt dicht im komplexen Einheitskreis. Das heisst präzise: Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und alle $\epsilon > 0$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ so dass $|w^n - z| < \epsilon$ gilt.

Beweis der Vermutung: Mit der Annahme, dass wir π und die Exponentialfunktion exp schon definiert haben, können wir die Zahl z in Polarkoordinaten $\exp(i \arg(z))$ schreiben, wobei $\arg(z) \in [0, 2\pi)$ der Winkel zwischen der reellen Achse und der durch 0 und z gegebenen Geraden ist (arg steht für Argument). In unserem Fall ist

$$arg(z) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \tfrac{\pi}{3},$$

darum ist $z = \exp(\frac{i\pi}{3})$ und darum $z^6 = \exp(\frac{i\pi}{3})^6 = \exp(2i\pi) = 1$. Auf der anderen Seite ist das Argument von w

$$arg(w) = \arctan\left(\tfrac{1}{3}\right)$$

kein rationales Vielfaches von 2π, also $n \cdot \arg(w) \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Darum wird w^n für kein n zu 1 werden. Wir skizzieren kurz, dass W dicht auf dem Einheitskreis liegt. Dies ist dasselbe, wie zu zeigen, dass wir mit $\arg(w^n)$ jeden Winkel in $[0, 2\pi)$ erhalten.

Wir beweisen die folgende Aussage: Sei $x \notin \mathbb{Q}$ eine irrationale Zahl, dann ist die Menge $\{nx \mod 1 \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset [0,1]$ dicht in $[0,1]$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Wähle N grösser als $\frac{1}{\epsilon}$. Wir können dann das Intervall $[0,1]$ in N Intervalle teilen, sodass alle Länge kleiner als ϵ haben. Die Menge $\{nx \mod 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ besteht aus unendlich vielen Elementen (sonst gäbe es $m \neq n \in \mathbb{Z}$ mit $nx \equiv mx \mod 1$, also $(n-m)x = k$ für $k \in \mathbb{Z}$. Aber dann wäre $x = \frac{k}{n-m}$ rational). Also muss eines der kleinen Intervalle mindestens zwei Elemente enthalten (durch das Schubfachprinzip von Aufgabe 1 aus Serie 1). Diese Elemente $n_1 x$ und $n_2 x$ sind verschieden und $|(n_1 x - n_2 x) \mod 1| \leq \epsilon$. Die Zahlen $(l(n_1 - n_2)x) \mod 1$ mit $l \in \mathbb{Z}$ sind über das ganze Intervall $[0,1]$ verteilt, aber in einem Abstand der kleiner als ϵ ist. Wir landen also in jedem Intervall mindestens einmal, das heisst $\{l(n_1 - n_2)x \mod 1 \mid l \in \mathbb{Z}\}$ liegt dicht in $[0,1]$. Da aber $\{l(n_1 - n_2)x \mod 1 \mid l \in \mathbb{Z}\}$ eine Teilmenge von $\{nx \mod 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ist, sind wir fertig.

□

Aufgabe 7. Bestimmen Sie die Real- und Imaginärteile, den Betrag und das komplex Konjugierte von

(1) $z = \frac{i-4}{2i-3}$,
(2) $z = \frac{2\sqrt{2}i}{i-1}$,
(3) $z = \overline{(2-i)^3}$,
(4) $z = \left(\overline{2-i}\right)^3$

Lösung.

(1)

$$z = \frac{i-4}{2i-3} = \frac{(i-4)(2i+3)}{(2i-3)(2i+3)} = \frac{-2i-8i-12+3i}{-4-9} = \frac{14+5i}{13}$$

So, $\mathrm{Re}(z) = \frac{14}{13}$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{5}{13}$, $|z| = \sqrt{\frac{14^2+5^2}{13^2}} = \frac{17}{13}$, $\overline{z} = \frac{14-5i}{13}$

(2)

$$z = \frac{2\sqrt{2}i}{i-1} = \frac{2\sqrt{2}i(i+1)}{(i-1)(i+1)} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{-1-1} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

So, $\mathrm{Re}(z) = \sqrt{2}$, $\mathrm{Im}(z) = -\sqrt{2}$, $|z| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$, $\overline{z} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

(3)

$$z = \overline{(2-i)^3} = \overline{8 - 3 \cdot 2^2 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 - i^3} = \overline{2 - 11i} = 2 + 11i$$

So, $\mathrm{Re}(z) = 2$, $\mathrm{Im}(z) = 11$, $|z| = \sqrt{2^2 + 11^2} = 5\sqrt{5}$, $\overline{z} = 2 - 11i$

(4) Aus Lemma 2.37(iii) im Skript $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$. Es folgt, dass

$$(\overline{2-i})^3 = \overline{2-i} \cdot \overline{2-i} \cdot \overline{2-i} = \overline{(2-i) \cdot (2-i) \cdot (2-i)} = \overline{(2-i)^3}$$

So, $\mathrm{Re}(z) = 2$, $\mathrm{Im}(z) = 11$, $|z| = \sqrt{2^2 + 11^2} = 5\sqrt{5}$, $\overline{z} = 2 - 11i$ aus (3).

□

Aufgabe 8. Zeigen Sie die folgende Behauptung: für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \le n \le m+1$ gilt $n = m$ oder $n = m+1$.

Lösung. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ durch

$$\forall m \in \mathbb{N} : ((m \le n \le m+1) \Rightarrow n \in \{m, m+1\}).$$

Dann gilt $A(1)$, denn falls $mm \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $m \le 1 \le m+1$ erfüllt, dann gilt wegen $m \ge 1$ auch $m = 1 = n$.
Angenommen es gilt nun $A(n)$ für ein $nm \in \mathbb{N}$ und wir wollen $A(n+1)$ zeigen. Sei also $mm \in \mathbb{N}$, so dass $m \le\le n+1 \le m+1$ gilt. Falls $m = 1$ ist, dann gilt $1 \le n+1 \le 2 = 1+1$ und damit $n \le 2-1 = 1$. Wegen $n \ge 1$ folgt $n = 1 = m$ und somit $n+1 = m+1$. Falls aber $m \ne 1$ ist, dann ist wegen der ersten Behauptung $m - 1m \in \mathbb{N}$ und $m - 1 \le n \le m$. Da wir aber $A(n)$ angenommen haben, gilt $n \in \{m-1, m\}$ und daher $n+1 \in \{m, m+1\}$.
Wir haben also den Induktionsanfang $A(1)$ und den Induktionsschritt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für ein beliebiges n gezeigt. Daher gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Aufgabe 9. Multiple choice Fragen.

(1) Betrachte die folgende Menge

$$X := \left\{ x \in \mathbb{R} : \ 2x + \frac{3}{x} + 7 \le 0 \right\}$$

Welche der folgenden Mengen ist gleich X?

(a) $\varnothing$,
(b) $(-\infty, -3) \cup (-\frac{1}{2}, 0)$
(c) $(-\infty, 0)$,
(d) $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, 3)$,
(e) $\underline{\text{keins der Obigen.}}$

(2) Sei $x \in \mathbb{R}$. Welcher Ausdruck entspricht stets $\sqrt{x^2}$?

(a) x,
(b) $\pm x$,
(c) $\underline{|x|}$,
(d) keins der Obigen.

(3) Wie viele Lösungen besitzt die Gleichung $z^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{C}$?

(a) 0,
(b) 1,
(c) $\underline{2}$,
(d) > 2.

(4) Seien $w, z \in \mathbb{C}$. Welche der folgenden Aussage gilt im Allgemeinen nicht?

(a) $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
(b) $\underline{\operatorname{Re}(z^2) = (\operatorname{Re} z)^2.}$
(c) $|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.
(d) Aus $z^4 = w^4$ folgt $|z| = |w|$.

(5) Sei $z = i^{23}$. Welche der folgenden Aussagen gilt?

(a) $|z| = 0$ und $\overline{z} = i$,

(b) $|z| = 1$ und $\overline{z} = -i$,

(c) $\underline{|z| = 1 \text{ und } \overline{z} = i}$,

(d) $|z| = 0$ und $\overline{z} = -i$,