Lösungen zur Übungsserie 5

Aufgabe 1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und seien $f, g \in \mathbb{C}[x]$ zwei Polynome mit Grad kleiner gleich n, die auf mehr als n Punkten übereinstimmen (das heisst, $f(x) = g(z)$ gilt für mehr als n Punkte $x \in \mathbb{C}$). Zeigen Sie, dass dies $f = g$ impliziert.

Lösung. Wir definieren das Polynom $h := f - g \in \mathbb{C}[x]$. Da f und g auf mehr als n Punkte übereinstimmen, es folgt, dass h mehr als n Nullstelle hat. Wir behaupten, dass dies $h = 0$ impliziert.

Lemma. Sei $f \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom so dass $f \neq 0$ und $\deg(f) = n$. Dann hat f höchstens n Nullstelle.

Beweis. Seien $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{C}$ die Nullstelle von f. Wir zeigen $m \leq n$. Wir wissen aus der Vorlesung, dass f durch $x - x_i$ für alle $i = 1, \ldots, m$ teilbar ist. Das heisst, dass $q \in \mathbb{C}[x]$ so dass $q \neq 0$ existiert, so dass $f = q \cdot (x - x_1) \ldots (x - x_m)$. Dann ist $\deg(q) = \deg(f) - \deg((x - x_1) \ldots (x - x_m)) = n - m$. Da $\deg(q) \geq 0$ es folgt $m \leq n$. □

Es folgt aus obiger Lemma, dass $h = 0$ und somit $f = g$ gilt. □

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass der Polynomring $\mathbb{Q}[x]$ abzählbar unendlich ist. Schliessen Sie, dass die Menge $\overline{\mathbb{Q}}$ der algebraischen Zahlen abzählbar unendlich ist

Lösung. Sei A_i die Menge der Polynome von Grad kleiner oder gleich i. Da ein Polynom eindeutig durch seine Koeffizienten gegeben ist, haben wir, dass A_i bijektiv zu $\underbrace{\mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}}_{i+1}$ ist. Wir wissen, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, darum ist auch $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ abzählbar, sowie induktiv auch A_i. Bemerke, dass $\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{i=0}^{n} A_i$ gilt. Da eine abzählbare Vereinigung von abzählbare Menge abzählbar ist (siehe Serie 4), dann ist $\mathbb{Q}[X]$ abzählbar.
Wir zeigen jetzt, dass $\overline{\mathbb{Q}}$ abzählbar ist. Jedes Element im algebraischen Abschluss kann per Definition als Nullstelle eines Polynoms geschrieben werden. Sei B_i die Menge der Zahlen in $\overline{\mathbb{Q}}$, welche als Nullstelle eines Polynoms in A_i geschrieben werden kann. Nummeriere die Nullstellen mit einem Label in $\{1, \ldots i\}$. Es gibt eine Abbildung $B_i \longrightarrow A_i \times \{1, \ldots i\}$, welche injektiv ist. Genauer, wähle für jede algebraische Zahl ein Polynom in A_i, so dass die Zahl eine Nullstelle ist, sowie speichere in $\{1, \ldots i\}$, welche Nullstelle es ist. Wir können aus dem Bild eindeutig die Zahl wieder rekonstruieren, also ist die Funktion injektiv. Weil A_i abzählbar ist, sowie auch $\{0, \ldots, i\}$, ist auch $A_i \times \{1, \ldots, i\}$ abzählbar. Wir folgern, dass B_i abzählbar ist.
Da $\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ ist, schliessen wir, dass $\overline{\mathbb{Q}}$ abzählbar ist. □

Aufgabe 3. Finden Sie je ein Beispiel für

(1) eine unbeschränkte, stetige Funktion auf einem beschränkten Intervall,
(2) eine unbeschränkte, stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall,
(3) eine unbeschränkte Funktion auf einem kompakten Intervall, die in höchstens einem Punkt unstetig ist.

Sie müssen keine Beweise angeben

Lösung.

(1) Die Funktion $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1/x$ ist unbeschränkt und stetig auf einem beschränkten Intervall.
(2) Die Funktion $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$ ist unbeschränkt und stetig auf einem abgeschlossenen Intervall.
(3) Die Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1/x, & x > 0, \end{cases}$$

ist unbeschränkt auf einem abgeschlossenem und beschränktem Intervall und nur im Punkt $x_0 = 0$ unstetig.

□

Aufgabe 4. Sei I ein offenes Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Sei $x_0 \in I$ so, dass $f(x_0) \neq 0$ gilt. Beweisen Sie, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(y) \neq 0$ für alle $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt.

Lösung. f ist bei x_0 stetig, das heisst, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt. Bemerke:

(1) $|x - x_0| < \delta$ ist äquivalent zu $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,
(2) $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ist äquivalent zu $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$

Wir setzen $\varepsilon := \frac{|f(x_0)|}{2}$. Bemerke: $\varepsilon > 0$ und $0 \notin (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$.
Da f bei x_0 stetig ist und da $\varepsilon > 0$ ist, es existiert (nach der Definition von Stetigkeit) ein $\delta > 0$ so dass für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

folgt. Da $0 \notin (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ haben wir die Behauptung bewiesen. □

Aufgabe 5. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ nicht-leer und sei $\mathcal{F}(D)$ die Menge aller reellwertigen Funktionen auf D. Wir definieren die Relation $\leq$ auf $\mathcal{F}(D)$ wie folgt: für $f, g \in \mathcal{F}(D)$ gilt $f \leq g$ genau dann, wenn $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in D$ gilt.
Zeigen Sie, dass $\leq$ eine Ordnungrelation auf $\mathcal{F}(D)$ ist, die im Allgemeinen nicht linear ist. Unter welche Bedingungen ist $\leq$ linear?

Lösung. Wir zeigen, dass $\leq$ Axiome (10), (11) und (12) auf Seite 77 im Skript erfüllt. Seien $f, g, h \in \mathcal{F}(D)$.

Reflexivität: Natürlich ist $f(x) \leq f(x)$ für alle $x \in D$, so $f \leq f$ gilt.

Antisymmetrie: Angenommen $f \leq g$ und $g \leq f$ zeigen wir $f = g$. Da $f(x) \leq g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in D$ gilt, es muss $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D$ gelten. Das ist äquivalent zu $f = g$ als Funktionen.

Transitivität: Angenommen $f \leq g$ und $g \leq h$ zeigen wir $f \leq h$. Dies folgt direkt aus $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in D$.

Wir zeigen, dass $\leq$ im Allgemeinen nicht linear ist. Sei zum Beispiel $D = \mathbb{R}$ und betrachte die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2x$, dann ist $g(-1) < f(-1)$ aber $f(1) < g(1)$. Das heisst dass weder $f \leq g$ noch $g \leq f$ gelten kann.
$\leq$ ist linear genau dann, wenn D nur aus einer Punkt besteht.

$\square$

Aufgabe 6. Verwenden Sie den binomischen Lehrsatz, um die Identität

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}\binom{n}{m} = \binom{n}{k} 2^{n-k}$$

für alle $k \leq n$ zu beweisen.

Lösung. Wir fixieren $n, k \in \mathbb{N}_0$ wie in der Behauptung. Nach binomischen Lehrsatz (Satz 3.28 im Skript) gilt

$$2^{n-k} = (1+1)^{n-k} = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} 1^{n-k} 1^k = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j}$$

Wir definieren $m := j + n$, dann ist

$$2^{n-k} = \sum_{m=k}^{n} \binom{n-k}{m-k}$$

Es gilt:

$$\binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k} = \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!} = \frac{n!m!}{k!(m-k)!m!(n-m)!} =$$
$$= \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{m}{k}\binom{n}{m}$$

Wir schliessen, dass

$$\binom{n}{k} 2^{n-k} = \sum_{m=k}^{n} \binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}\binom{n}{m}$$

gilt. $\square$

Aufgabe 7. In dieser Übung möchten wir in Analogie zum binomischen Lehrsatz (Satz 3.28) Ausdrücke der Form $(z_1 + \ldots + z_d)^n$ für komplexe Zahlen $z_1, \ldots, z_d \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ untersuchen. Wir betrachten dazu sogenannte Multiindizes $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^d$. Sei $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$

ein Multiindex so dass $|\boldsymbol{\alpha}| := \sum_{i=1}^d \alpha_i = n$ und seien $z_1, \ldots, z_d \in \mathbb{C}$ Komplexe Zahlen; wir schreiben $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_d)$. Wir definieren:

$$\binom{n}{\boldsymbol{\alpha}} := \frac{n!}{\alpha_1! \ldots \alpha_d!} \text{ und } \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}} := z_1^{\alpha_1} \ldots z_d^{\alpha_d}$$

Zeigen Sie die folgende Identität:

$$(z_1 + \ldots + z_d)^n = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^d:\ |\boldsymbol{\alpha}|=n} \binom{n}{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}}$$

Lösung. Für jeden festen $n \in \mathbb{N}$ wird die Identität als eine Aussage $A(d)$ über d per Induktion bewiesen. Bemerke, dass $A(2)$ aus dem binomischen Lehrsatz folgt: seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^2:\ |\boldsymbol{\alpha}|=n} \binom{n}{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}}$$

wobei wir $\alpha_1 = k$ und $\alpha_2 = n - k$ identifiziert haben.

Induktionsschritt: Wir nehmen $A(d-1)$ an und zeigen, dass $A(d)$ gilt. Seien $z_1, ..., z_d \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$(z_1 + \ldots + z_d)^n = \big(z_1 + (z_2 + \ldots + z_d)\big)^n = \sum_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}_0^2:\ |\boldsymbol{\beta}|=n} \binom{n}{\boldsymbol{\beta}} z_1^{\beta_1} (z_2 + \ldots + z_d)^{\beta_2}$$

Wir benutzen jetz $A(d-1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}_0^2:\ |\boldsymbol{\beta}|=n} \binom{n}{\boldsymbol{\beta}} z_1^{\beta_1} (z_2 + \ldots + z_d)^{\beta_2} &= \sum_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}_0^2:\ |\boldsymbol{\beta}|=n} \binom{n}{\boldsymbol{\beta}} z_1^{\beta_1} \sum_{\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{N}_0^{d-1}:\ |\boldsymbol{\gamma}|=\beta_2} \binom{\beta_2}{\boldsymbol{\gamma}} (z_2, ..., z_d)^{\boldsymbol{\gamma}} = \\ &= \sum_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}_0^2:\ |\boldsymbol{\beta}|=n} \sum_{\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{N}_0^{d-1}:\ |\boldsymbol{\gamma}|=\beta_2} \binom{n}{\boldsymbol{\beta}} \binom{\beta_2}{\boldsymbol{\gamma}} z_1^{\beta_1} (z_2, ..., z_d)^{\boldsymbol{\gamma}}\end{aligned}$$

Wir definieren jetzt $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^d$ als $\boldsymbol{\alpha} := (\beta_1, \gamma_1, ..., \gamma_{d-1})$. Bemerke:

(1) $|\boldsymbol{\alpha}| = \beta_1 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_{d-1} = \beta_1 + \beta_2 = n$,

(2) Es gilt

$$\binom{n}{\boldsymbol{\beta}} \binom{\beta_2}{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{n! \beta_2!}{\beta_1! \beta_2! \gamma_1! \ldots \gamma_{d-1}!} = \frac{n!}{\beta_1! \gamma_1! \ldots \gamma_{d-1}!} = \binom{n}{\boldsymbol{\alpha}}$$

(3) Sei $\boldsymbol{z} = (z_1, ..., z_d)$, dann

$$z_1^{\beta_1} (z_2, ..., z_d)^{\boldsymbol{\gamma}} = z_1^{\beta_1} z_2^{\gamma_1} \ldots z_d^{\gamma_{d-1}} = \binom{n}{\boldsymbol{\alpha}}$$

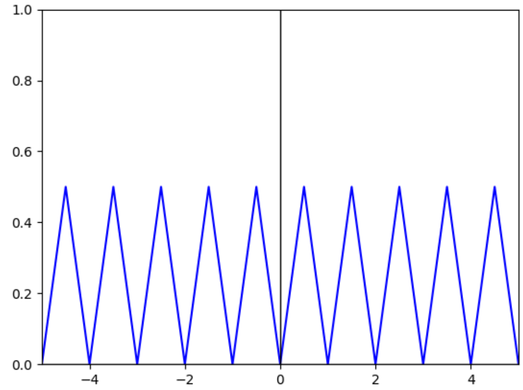
Somit ist

$$\begin{aligned}\sum_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}_0^2:\ |\boldsymbol{\beta}|=n} \sum_{\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{N}_0^{d-1}:\ |\boldsymbol{\gamma}|=\beta_2} \binom{n}{\boldsymbol{\beta}} \binom{\beta_2}{\boldsymbol{\gamma}} z_1^{\beta_1} (z_2, ..., z_d)^{\boldsymbol{\gamma}} &= \sum_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}_0^2:\ |\boldsymbol{\beta}|=n} \sum_{\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{N}_0^{d-1}:\ |\boldsymbol{\gamma}|=\beta_2} \binom{n}{\boldsymbol{\alpha}} \binom{n}{\boldsymbol{\alpha}} = \\ &= \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^d:\ |\boldsymbol{\alpha}|=n} \binom{n}{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}}\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. $\square$

Aufgabe 8. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \inf_{k\in\mathbb{Z}} |x-k|$. Skizzieren Sie den Graphen von f. Ist f stetig? Begründen Sie.

Lösung. Die Funktion f sieht wie folgt aus:



Die Funktion f ist stetig: Wir zeigen Stetigkeit in einem beliebigen $x_0 \in \mathbb{R}$. Sei $x \in \mathbb{R}$. Mit der Dreiecksungleichung haben wir $|x_0-k| \leq |x_0-x|+|x-k|$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Darum erhalten wir auch

$$\inf_{k\in\mathbb{Z}} |x_0-k| \leq |x_0-x| + \inf_{k\in\mathbb{Z}} |x-k|,$$

was dasselbe ist wie

$$f(x_0) - f(x) \leq |x_0 - x|.$$

Durch vertauschen von x und x_0 erhalten wir mit demselben Argument, dass $f(x) - f(x_0) \leq |x_0 - x|$ ist. Zusammen ergibt das

$$|f(x_0) - f(x)| \leq |x_0 - x|. \tag{1}$$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Um Stetigkeit in x_0 zu zeigen, müssen wir ein $\delta > 0$ finden, für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ folgt, dass $|f(x_0) - f(x)| < \epsilon$. Aus Formel (1) ist ersichtlich, dass die Wahl $\delta = \epsilon$ dieser gewünschten Anforderung genügt.
Da x_0 beliebig war, haben wir gezeigt, dass f überall stetig ist.
(Wir haben sogar gezeigt, dass die Funktion f Lipschitz stetig mit Konstante $L = 1$ ist (siehe Skript Übung 4.77), was strenger ist als nur stetig.) □

Aufgabe 9. Multiple choice Fragen

(1) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nicht-leer und sei $-A := \{-x \mid x \in A\}$. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht**?
   (a) A ist unbeschränkt genau dann, wenn $\max(\sup(A), \sup(-A))$ unendlich ist.
   (b) Falls $\min(A)$ existiert, dann ist $\min(A) = -\max(A)$.
   (c) Ist A offen, dann ist $\sup(A) \notin A$.
   (d) Falls A beschränkt und abzählbar ist, dann ist $\max(-A) = -\inf(A)$
(2) Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$. Wie viele Summanden kommen in der Summe $\sum_{k=m}^{n} a_k$ vor?
   (a) $m - n - 1$
   (b) $n - m$

(c) $\underline{n - m + 1}$

(d) $m - n + 1$

(3) Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$. Welche der folgenden Identitäten für $S = \sum_{k=m}^{n} a_k$ ist im Allgemeinen falsch?

(a) $S = \sum_{i=m}^{n} a_{m+n-i}$

(b) $\underline{S = \sum_{j=1}^{n-m} a_{n+1-j}}$

(c) $S = \sum_{k=0}^{n-m} a_{m+k}$

(d) $S = \sum_{l=0}^{n-m} a_{n-l}$

(4) Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Welche der folgenden Formeln gilt **nicht** im Allgemeinen?

(a) $\underline{\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1}}$

(b) $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$

(c) $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$

(d) $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0$

(5) Für alle beschränkten nicht leeren Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\sup(A)$ ist ein Häufungspunkt von A,

(b) Falls a und b Häufungspunkte von A sind dann ist $a = b$,

(c) Falls A abzählbar unendlich ist, dann hat A keinen Häufungspunkt,

(d) Falls A offen ist dann hat A einen Häufungspunkt.