Lösungen zur Übungsserie 6

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\begin{aligned} h: \ \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

stetig ist.

Lösung. Betrachten wir dazu einen beliebigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und ein $\varepsilon > 0$. Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir wollen

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right|$$

kleiner als ε haben, falls $|x - x_0| \leq \delta$ ist.
Wir bemerken zuerst, dass δ echt kleiner als $|x_0|$ sein muss, sonst könnte x beliebig nahe an 0 sein und darum $\frac{1}{x}$ beliebig gross.
Sei also $|x - x_0| \leq \delta$ und $\delta \leq |x_0|$. Dann haben wir

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \left| \frac{x_0 - x}{x x_0} \right| < \frac{\delta}{|x||x_0|} < \frac{\delta}{(|x_0| - \delta)|x_0|}.$$

Weil wir wollen, dass dieser Ausdruck maximal ε ist, betrachten wir also, was wir bei Gleichheit finden:

$$\varepsilon = \frac{\delta'}{(|x_0| - \delta')|x_0|}.$$

Darum wählen wir

$$\delta' = \frac{\varepsilon |x_0|^2}{1 + \varepsilon |x_0|}.$$

Sei also $\delta = \min \left\{ |x_0|, \frac{\varepsilon |x_0|^2}{1+\varepsilon |x_0|} \right\} > 0$ und x so dass $|x - x_0| < \delta$. Dann haben wir wegen der Wahl von δ

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon.$$

Wir schliessen dass $h(x) = \frac{1}{x}$ stetig ist. □

Aufgabe 2. Sei $f \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom von ungeradem Grad. Zeigen Sie, dass f eine reelle Nullstelle besitzt.

Lösung. Sei $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ mit $a_n \neq 0$. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $a_n > 0$ ist. (Ansonsten ersetze f durch $-f$.) Für das Polynom $q := a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ gilt dann nach der Dreiecksungleichung für $|x| \geq 1$

$$|q(x)| \leq |a_{n-1}|\, x^{n-1} + \cdots + |a_1|\,|x| + |a_0| \leq (|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|)\,|x|^{n-1} = A\,|x|^{n-1},$$

wobei $A := |a_{n-1}| + \cdots + |a_0|$. Für $x_1 < -A/a_n$ folgt hieraus

$$f(x_1) = a_n x_1^n + q(x_1) \leq a_n x_1^n + |q(x_1)| \leq a_n x_1^n + A\,|x_1|^{n-1} = (a_n x_1 + A)x_1^{n-1} < 0,$$

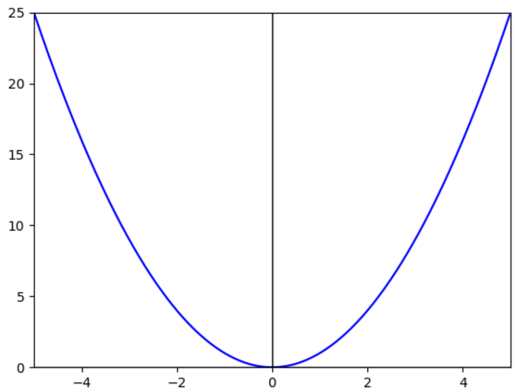
da $n - 1 = \deg f - 1$ nach Annahme gerade und somit $x_1^{n-1} = |x_1|^{n-1} > 0$ ist. Analog gilt für $x_2 > A/a_n$

$$f(x_2) = a_n x_2^n + q(x_2) \geq a_n x_2^n - |q(x_2)| \geq a_n x_2^n - A\,|x_2|^{n-1} = (a_n x_2 - A)x_2^{n-1} > 0.$$

Da f als Polynomfunktion stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz die Existenz einer Nullstelle von f zwischen x_1 und x_2. □

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass das Polynom $f(x) = x^2$ nicht gleichmässig stetig ist auf $\mathbb{R}$. Verifizieren Sie des Weiteren, dass die Einschränkung von f auf $[0, 1]$ gleichmässig stetig ist, ohne Satz 3.75 zu benutzen (Satz von Heine).

Lösung. Wir zeigen, dass x^2 nicht gleichmässig stetig ist:



Erinnerung: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst gleichmässig stetig genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall x, y \in \mathbb{R}:\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Seien $\varepsilon = 1$ und $\delta > 0$ beliebig. Dann haben $x = \frac{1}{\delta}$ und $y = x + \frac{\delta}{2}$ zwar Abstand kleiner als δ, aber

$$|f(y) - f(x)| = \delta x + \tfrac{\delta^2}{4} = 1 + \tfrac{\delta^2}{4} > 1.$$

Die Funktion x^2 ist also nicht gleichmässig stetig.

Wir zeigen, dass die Einschränkung von x^2 auf $[0, 1]$ gleichmässig stetig ist. Sei $\varepsilon > 0$. Wir suchen ein $\delta > 0$ so dass für alle $x, y \in [0,1]$ mit $|x-y| < \delta$ wir haben $x^2 - y^2| < \varepsilon$. Sei momentan $\delta > 0$ beliebig, dann wir bemerken, dass

$$|x^2 - y^2| = |(x+y)(x-y)| = |x+y||x-y| < |x+y|\delta \leq 2\delta$$

gilt, da $0 \leq x, y \leq 1$. Wir wählen $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$ um die Behauptung zu beweisen. $\square$

Aufgabe 4. (1) Finden Sie alle stetige Funktionen $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ so dass

$$f(2x) = f(x)$$

für alle $x \in [0,\infty)$. Gibt es solche Funktionen, die aber nicht stetig sind?

(2) Finden Sie alle stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so dass

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. (Challenge) Gibt es solche Funktionen, die aber nicht stetig sind?

Lösung.

(1) f ist genau dann stetig, wenn f konstant ist:

Falls f konstant ist, dann ist f auch stetig. Nehmen wir nun an, dass f stetig ist und $f(x) = f(2x)$ für alle $x \geq 0$ gilt. Sei $a = f(0)$. Wir zeigen, dass $f(x) = a$ für alle $x > 0$. Bemerke zuerst, dass $f(x) = f(2x)$ für alle $x > 0$, dieselbe Bedingung ist wie $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$ für alle $x > 0$. Per Induktion haben wir für alle positive $n \in \mathbb{N}$, dass $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Weil f stetig bei 0 ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(0)| = |f(x) - a| < \varepsilon$ für alle $0 < x < \delta$. Betrachte nun ein beliebiges $x > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{x}{2^n} \leq \delta$. Dann ist $|f(x) - a| = |f\left(\frac{x}{2^n}\right) - a| \leq \varepsilon$. Weil ε beliebig war, ist $f(x) = a$, was zeigt, dass f konstant ist.

f muss allgemein nicht konstant sein: Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 2^n \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist f nicht konstant und nicht stetig mit $f(x) = f(2x)$ für alle $x \in [0,\infty)$.

(2) Die stetigen Lösungen sind von der Form $f(x) = ax$ für ein bestimmtes $a \in \mathbb{R}$:

Mit $x = y = 0$ finden wir zuerst $f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ und somit $f(0) = 0$.
Für positive rationale Zahlen $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ (also obda $m > 0$) haben wir

$$nf(\tfrac{m}{n}) = n\Big(f(\underbrace{\tfrac{1}{n} + \ldots + \tfrac{1}{n}}_{m})\Big) = n\left(f(\tfrac{1}{n}) + \ldots + f(\tfrac{1}{n})\right) = nmf(\tfrac{1}{n}) = m\Big(f(\underbrace{\tfrac{1}{n} + \ldots + \tfrac{1}{n}}_{n})\Big) = mf(1).$$

Daraus folgt, dass $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}f(1)$.
Weil ausserdem $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$ und somit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist die Formel

$$f(\tfrac{m}{n}) = \tfrac{m}{n}f(1)$$

für alle rationalen Zahlen $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ wahr.
Setze $a := f(1)$. Wir behaupten, dass $f(x) = ax$ für alle $x \in \mathbb{R}$ sein muss. Das liegt, daran, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt und wir Stetigkeit fordern. Konkret, sei $x_0 \in \mathbb{R}$

und $\varepsilon > 0$. Aus der Stetigkeit bei x_0 gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ auch $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ gilt. Das gleiche gilt natürlich auch, wenn wir δ durch $\delta' = \min\{\delta, \varepsilon\}$ ersetzen. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, gibt es ein $y \in \mathbb{Q}$, so dass $|x_0 - y| \leq \delta'$. Dann aber gilt folgendes mit der Dreiecksungleichung und weil $f(y) = ay$ für $y \in \mathbb{Q}$:

$$|ax_0 - f(x_0)| \leq |ax_0 - ay| + |ay - f(x_0)| = |a||x_0 - y| + |f(y) - f(x_0)| \leq |a|\varepsilon + \varepsilon.$$

Weil ε beliebig war, muss $|ax_0 - f(x_0)| = 0$ und somit $f(x_0) = ax_0$ sein.

Es gibt auch unstetige Lösungen: Aus der linearen Algebra wissen wir, dass $\mathbb{R}$ ein (nicht endlich-dimensionaler) $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist. Mit dem Auswahlaxiom können wir eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ wählen. Analog zur obigen Rechnungen, zeigt man, dass $f(xq) = qf(x)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Das heisst f muss in jedem Fall eine lineare Abbildung über $\mathbb{Q}$ sein. Wir können eine nicht stetige Abbildung konstruieren, welche trotzdem $f(x+y) = f(x) + f(y)$ erfüllt, in dem wir ein Basiselement $x \in \mathcal{B}$ auf x_0 senden und linear auf dem eindimensionalen $\mathbb{Q}$-Untervektorraum U aufgespannt von x erweitern. Die anderen Basiselemente senden wir auf 0. Diese Abbildung ist auf keinen Fall stetig, da sonst wie oben gezeigt aus $f(x) = x$ auf der dichten Teilmenge U folgen würde, dass $f(x) = x$ auf ganz $\mathbb{R}$.

□

Aufgabe 5. Beweisen Sie, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann stetig ist, wenn für alle offene Teilmenge $O \subseteq \mathbb{R}$, $f^{-1}(O) \subseteq \mathbb{R}$ wieder offen ist.

Lösung. Wir können Stetigkeit auch etwas kürzer in Ballnotation schreiben: *Eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig bei x_0, falls es für jeden Ball $B_\varepsilon(f(x_0))$ (also $\varepsilon > 0$ beliebig) einen Ball $B_\delta(x_0)$ gibt (also ein $\delta > 0$ existiert), so dass $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$.* Wir fahren nun mit dem Beweis der Aufgabe fort.

$\Rightarrow$: Wir nehmen an, dass f stetig ist. Sei $O \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Menge. Wir beweisen, dass $f^{-1}(O)$ auch offen ist. Sei $x_0 \in f^{-1}(O)$, also $f(x_0) \in O$. Weil O offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq O$. Wegen der Stetigkeit von f finden wir ein $\delta > 0$, so dass $f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$. Aus $B_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq O$ und darum $f(B_\delta(x_0)) \subseteq O$ folgt, dass $B_\delta(x_0)$ ein offener Ball in $f^{-1}(O)$ um x_0 ist. Daraus schliessen wir, dass $f^{-1}(O)$ offen ist.

$\Leftarrow$: Wir nehmen an, dass $f^{-1}(O)$ für beliebige offene Mengen $O \subseteq \mathbb{R}$ offen ist. Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Da $B(f(x_0), \varepsilon)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, ist per Annahme auch $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Ausserdem ist $x_0 \in f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$. Darum gibt es einen Ball $B(x_0, \delta)$ mit $\delta > 0$, so dass $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$. Aber dann ist $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$, also f stetig. □

Aufgabe 6. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Wir nennen eine reellwertige Funktion f auf D Lipschitz-stetig, falls ein $L \geq 0$ existiert mit $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in D$.

(1) Geben Sie ein, zwei Beispiele von Lipschitz-stetigen Funktionen und zeigen Sie, dass eine Lipschitz-stetige Funktion auch gleichmässig stetig ist.

(2) Zeigen Sie, dass die Wurzelfunktion $x \in [0, 2] \longmapsto \sqrt{x}$ zwar gleichmässig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

Hinweis: Beweisen sie folgende Ungleichung: $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(3) Zeigen Sie, dass die Wurzelfunktion $x \in [1, \infty) \longmapsto \sqrt{x}$ Lipschitz-stetig und gleichmässig stetig ist.

(4) Folgern Sie, dass die Wurzelfunktion $x \in [0, \infty) \longmapsto \sqrt{x}$ gleichmässig stetig ist.

Lösung.

(1) Beispiele von Lipschitz-stetige Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto |x|$ ist Lipischitz-stetig mit $L = 1$. In der Tat gilt efür alle $x, y \in \mathbb{R}$ die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

(b) $g : [0, 3) \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{2 + 3x}$ ist Lipischitz-stetig mit $L = \frac{3}{2\sqrt{2}}$. Seien $x, y \in [0, 3)$, dann

$$|\sqrt{2 + 3x} - \sqrt{2_3 y}| = |\frac{3(x - y)}{\sqrt{2 + 3x} + \sqrt{2 + 3y}}| \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}|x - y|$$

Sei f eine Lipischitz-stetige Funktion mit Lipschitz Konstante $L \geq 0$. Wir zeigen, dass g gleichmässig stetig ist.

Ist $L = 0$, so ist f konstant und damit gleichmässig stetig. Wir nehmen nun an, dass $L > 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen $\delta := \varepsilon/L > 0$. Ist $|x - y| \leq \delta$, dann gilt mit unserer Wahl von δ, dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \leq L\delta = L\varepsilon/L = \varepsilon,$$

(2) $x \in [0, 2] \longmapsto \sqrt{x}$ ist gleichmässig stetig:

Bemerke, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$$

gilt. Wir beweisen diese Ungleichung: oBdA $0 \leq y \leq x$, dann ist $\sqrt{xy} + y \geq 0$ und damit $x - y \geq x - 2\sqrt{xy} + y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$, was äquivalent zur Behauptung ist.

Seien nun $\varepsilon > 0$ und $x, y \in [0, 2]$. Wir wählen $\delta := \varepsilon^2$. Dann falls $|x - y| < \delta$ haben wir

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$$

$x \in [0, 2] \longmapsto \sqrt{x}$ ist nicht Lipschitz-stetig:

Wir nehmen per Wiederspruch an, dass ein $L \geq 0$ existiert, so dass $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in [0, 2]$. Wähle $x = 0$, dann ist für alle $y \in [0, 2]$

$$L \geq \frac{|\sqrt{y}|}{|y|} = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

Wähle jetzt ein $y \in [0, 2]$ so dass $y \leq \frac{1}{L^2}$, dann ist $L \geq \frac{1}{\sqrt{y}} > L$, ein Widerspruch.

(3) $x \in [1, \infty] \longmapsto \sqrt{x}$ ist Lipschitz-stetig:
Seien $x, y \in [1, \infty)$. oBdA: $x > y$. Wir lösen die Ungleichung $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L|x - y|$ für $L \geq 0$. Wir haben $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq L(x - y)$, da $x > y$ und $\sqrt{\cdot}$ monoton wachsend ist. Dann erhalten wir

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq L(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

und damit

$$L \geq \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

Da $x, y \geq 1$, wir könne $L = 2$ wählen.
Es folgt aus Teilaufgabe (1), dass $x \in [1, \infty] \longmapsto \sqrt{x}$ auch gleichmässig stetig ist.

(4) Dies folgt aus (2)+(3).

$\square$

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgaben

(1) Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist nicht gleichmässig stetig?
 (a) $f(x) = \sqrt{|x|}$
 (b) $f(x) = \min(\sqrt{|x|}, x^2)$
 (c) $f(x) = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |x - k^2|$
 (d) $f(x) = \inf_{k \in \mathbb{Z}} x \cdot |x - k|$

(2) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b < c$ und $f_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f_2 : [b, c] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. In welchem der folgenden Fälle ist die zusammengesetzte Funktion

$$f : [a, c] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} f_1(x), & \text{falls } x \in [a, b], \\ f_2(x), & \text{falls } x \in (b, c] \end{cases}$$

notwendigerweise stetig?
 (a) $f(b) = f_1(b)$,
 (b) $\forall \varepsilon > 0 : f_1(b - \varepsilon) = f_2(b + \varepsilon)$,
 (c) $f(b) = f_2(b)$,
 (d) In keinem dieser Fälle.

(3) Welche der folgende Funktionen ist streng monoton wachsend?
 (a) $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$,
 (b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x + x^3 + x^5 + x^6$,
 (c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3$,
 (d) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x^6}$.

(4) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $D' \subset D$ eine nichtleere Teilmenge von D und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?
 (a) Ist die Einschränkung $f|_{D'}$ stetig, so ist auch f stetig.
 (b) Ist $f|_{D'}$ stetig, so ist f in allen Punkten $x_0 \in D'$ stetig.
 (c) Ist D' offen in $\mathbb{R}$ und $f|_{D'}$ stetig, so ist f in allen Punkten $x_0 \in D'$ stetig. Ist $x_0 \in D'$ und $\varepsilon > 0$, so gibt es aufgrund der Stetigkeit von $f|_{D'}$ ein $\delta' > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für

$x \in D' \cap (x_0 - \delta', x_0 + \delta')$. Da D' offen ist, gibt es ausserdem ein $0 < \delta < \delta'$ mit $I := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D'$. Dann gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in I$, was die Stetigkeit von f in x_0 beweist.

(d) Ist D' abgeschlossen in $\mathbb{R}$ und $f|_{D'}$ stetig, so ist f in allen Punkten $x_0 \in D'$ stetig.

(5) Definiere $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ und

$$\begin{aligned} H\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Welche der folgenden Funktionen sind stetig?

(a) $H \cdot H$

(b) $F \circ H$

(c) $\underline{H \circ F}$

(d) Keine der obigen Funktionen.