Lösungen zur Übungsserie 7

Aufgabe 1. Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $f(x) = x^2$. Beweisen Sie im Detail und nur mit den aus der Vorlesung bekannten Methoden, dass

$$\int_a^b f(x)\ dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

gilt.

Lösung. Wir nehmen an, dass $a \geq 0$, sonst teilen wir das Intervall in positiven und negativen Teil.
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ die Zerlegung von $[a, b]$ definiert durch

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b - a).$$

Sei $u_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Treppenfunktion gegeben durch $u_n(x) = f(x_k) = x_k^2$, wobei $x \in [x_k, x_{k+1})$ für alle $0 \leq k < n$ und $x \in [0, 1)$, ausserdem sei $u_n(1) = x_{n-1}^2$. Wir haben $u_n \leq f$.

Sei $o_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Treppenfunktion, gegeben durch $o_n(x) = f(x_{k+1}) = x_{k+1}^2$, wobei $x \in [x_k, x_{k+1})$ für alle $0 \leq k < n$ und $x \in [0, 1)$, ausserdem $o_n(1) = x_n^2$. Wir haben $f \leq o_n$.

Wir berechnen $\int_a^b u_n dx$ und $\int_a^b o_n dx$.

$$
\begin{aligned}
\int_a^b u_n dx &= \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (a + \frac{k}{n}(b-a))^2 \frac{1}{n}(b-a) \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(a^2 + \frac{2k}{n} a(b-a) + \frac{k^2}{n^2}(b-a)^2 \right) \\
&= \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^2 + \frac{2a(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k + \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \right) \\
&= \frac{b-a}{n} \left(na^2 + \frac{2a(b-a)}{n} \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(b-a)^2}{n^2} \left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) \right) \\
&= \frac{b-a}{6n^2} \left(6n^2 a^2 + 6a(b-a)n(n-1) + (b-a)^2 (2n^2 - 3n + 1) \right) \\
&= \frac{b-a}{6n^2} \left(n^2 \left(6a^2 + 6a(b-a) + 2(b-a)^2 \right) + n \left(-6a(b-a) - 3(b-a)^2 \right) + (b-a)^2 \right) \\
&= \frac{b-a}{6n^2} \left(2n^2 (b^2 + ab + a^2) - 3n(b^2 - a^2) + (b-a)^2 \right) \\
&= \frac{1}{3}(b^3 - a^3) - \frac{1}{2n}(b^2 - a^2)(b-a) + \frac{1}{6n^2}(b-a)^3
\end{aligned}
$$

Bemerke, dass der extra Term

$$
-\frac{1}{2n}(b^2 - a^2)(b-a) + \frac{1}{6n^2}(b-a)^3 = \frac{(b-a)^2}{6n^2}(-3n(a+b) + (b-a))
$$

in der Tat kleiner 0 ist aber für n gegen unendlich gegen 0 strebt. Ähnlich erhalten wir

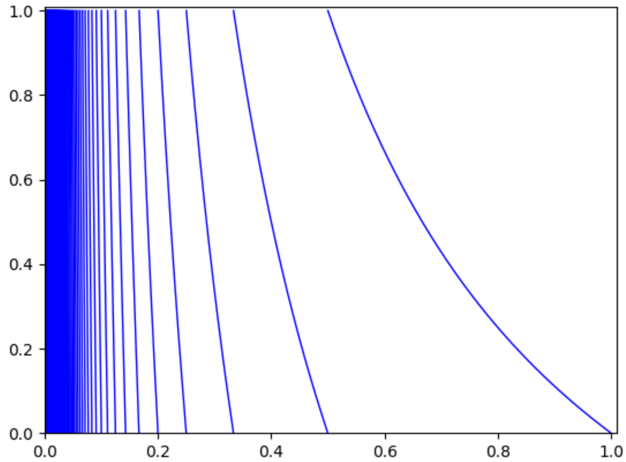
$$
\int_a^b o_n dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) + \frac{1}{2n}(b^2 - a^2)(b-a) + \frac{1}{6n^2}(b-a)^3.
$$

Wir schliessen $\int_a^b f dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$. $\square$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Funktion $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

integrierbar ist, wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundungsfunktion bezeichnet.



Lösung. Auf den Intervallen $I_n = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ passiert folgendes. Die Funktion $x \longmapsto \frac{1}{x}$ nimmt Werte in $[n, n+1)$ an und ist monoton fallend. Explizit ist $g|_{I_n}$ gegeben durch $g(x) = \frac{1}{x} - n$. Wir wissen, dass monoton fallende Funktionen Riemann-integrierbar sind, also ist $g|_{I_n}$ Riemann integrierbar. Wir benutzten folgendes Lemma.

Lemma. Seien $a < b < c$ und $f : [a,c] \to \mathbb{R}$. f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn beide $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ Riemann-integrierbar sind.

Beweis von Lemma. Es spielt keine Rolle, ob wir die Funktion f separat auf den einzelnen Teilintervallen [a, b] und [b, c] oder direkt auf [a, c] von unten und oben durch Treppenfunktionen approximieren kann. Im ersten Fall sind wir dadurch eingeschr ¨ankt, dass wir in der Zerlegung des Intervalls [a, c] den Punkt b dabei haben m ¨ussen. Wir k ¨onnen aber eine beliebige Zerlegung einer Treppenfunktion auf [a, c] verfeinern, in dem wir die Treppe die bei b ∈ [a, c] definiert ist, in zwei gleich hohe Treppen Spalten.

□

Aus dem Lemma wissen wir, dass g dann auch auf einer endlichen Vereinigung von den Intervallen I_n integrierbar ist. Sei $N \in \mathbb{N}$ und betrachte das Intervall $J_N = \bigcup_{n=1}^{N-1} I_n = (\frac{1}{N}, 1]$. Aus dem Argument vorher, wissen wir, dass $g|_{J_N}$ integrierbar ist. Wir haben also Treppenfunktionen $u_N, v_N : J_N \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $u_N \leq g|_{J_N} \leq v_N$, so dass

$$\int_{\frac{1}{N}}^{1} v_N(x)dx - \frac{1}{N} \leq \int_{\frac{1}{N}}^{1} g|_{J_N} dx \leq \int_{\frac{1}{N}}^{1} u_N(x)dx + \frac{1}{N}.$$

Aus diesen Treppenfunktionen können wir Treppenfunktionen $u'_N, v'_N : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ wie folgt konstruieren:

$$u'_N(x) = \begin{cases} u_N(x), & x \in J_N = (\frac{1}{N}, 1] \\ 0, & x \in [0, \frac{1}{N}] \end{cases} \qquad \text{und} \qquad v'_N(x) = \begin{cases} v_N(x), & x \in J_N = (\frac{1}{N}, 1] \\ 1, & x \in [0, \frac{1}{N}] \end{cases} .$$

und bemerken, dass $u'_N \leq g \leq v'_N$ und

$$\int_0^1 u'_N(x)dx = \int_0^{\frac{1}{N}} 0dx + \int_{\frac{1}{N}}^1 u_N(x)dx = \int_{\frac{1}{N}}^1 u_N(x)dx$$

sowie

$$\int_0^1 v'_N(x)dx = \int_0^{\frac{1}{N}} 1dx + \int_{\frac{1}{N}}^1 v_N(x)dx = \int_{\frac{1}{N}}^1 v_N(x)dx + \frac{1}{N}.$$

Da wir ausserdem die Folge u_N (und somit auch die Folge $\int_0^1 u'_N(x)dx$) monoton wachsend wählen können sowie die Folge v_N (und somit auch die Folge $\int_0^1 v'_N(x)dx$) monoton fallend und da

$$\int_0^1 v'_N(x)dx - \int_0^1 u'_N(x)dx \leq \frac{3}{N}.$$

bekommenen wir einen Grenzwert, welches das Integral von g beschreibt. □

Aufgabe 3. Seien $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, so dass

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b g(x)\ dx$$

gilt. Zeigen Sie, dass es ein $y \in [a,b]$ gibt, so dass $f(y) = g(y)$.

Lösung. Wir zeigen die Kontraposition: Falls es kein $y \in [a,b]$ gibt, so dass $f(y) = g(y)$ ist, dann ist

$$\int_a^b f(x)dx \neq \int_a^b g(x)dx.$$

Aus $f(y) \neq g(y)$ für alle $y \in [a,b]$ folgt, dass entweder $f < g$ oder $g < f$. In der Tat, falls wir $f(y_1) < g(y_1)$ und $g(y_2) < f(y_2)$ finden, also $f(y_1) - g(y_1) < 0 < f(y_2) - g(y_2)$ finden wir mit dem Zwischenwertsatz auf die Funktion $f - g$ angewendet ein y zwischen y_1 und y_2 mit $f(y) - g(y) = 0$, was entgegen unserer Annahme ist.

Nehmen wir an, dass $g < f$ ist. Dann ist $f - g = |f - g| > 0$ und es folgt, dass

$$\int_a^b |f-g|(x)dx = \int_a^b (f-g)(x)dx > 0,$$

also auch $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$. Das Argument für $f < g$ ist analog.

□

Aufgabe 4. Sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass das partikuläre Integral

$$F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

eine stetige Funktion auf $[a,b]$ definiert. Ist F auch gleichmässig, oder sogar Lipschitz-stetig?

Lösung. Da f als Riemann-integrierbare Funktion beschränkt ist, existiert ein $M \geq 0$ mit $|f| \leq M$. Für $x, y \in [a,b]$ mit $x \leq y$ gilt dann aufgrund von Intervalladditivität, Dreiecksungleichung und Monotonie des Riemann-Integrals

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &= \left| \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| = \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \\ &\leq \int_x^y |f(t)|\,dt \leq \int_x^y M\,dt = M(y-x) = M\,|y-x|\,. \end{aligned}$$

Wegen $|F(y) - F(x)| = |F(x) - F(y)|$ und $|y-x| = |x-y|$ gilt diese Ungleichung auch für $x > y$. Wir haben also

$$|F(y) - F(x)| \leq M\,|y-x|$$

für alle $x, y \in [a,b]$, und somit die Lipschitz-Stetigkeit von F nachgewiesen. Damit ist F auch gleichmässig stetig und insbesondere stetig. □

Aufgabe 5. Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass es ein $y \in [a,b]$ gibt, so dass

$$\int_a^b f(x)dx = f(y)(b-a)$$

ist.

Lösung. Falls $a = b$ ist, sind beide Seiten 0. Nehmen wir also an, dass $a < b$ ist.
Da f stetig ist und ihr Definitionsbereich ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall ist, nimmt f ihr Maximum M und ihr Minimum m an. Seien x_M und x_m in $[a,b]$, so dass $f(x_M) = M$ und $f(x_m) = m$. Wir können abschätzen:

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a)$$

und erhalten daraus

$$f(x_m) = m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M = f(x_M).$$

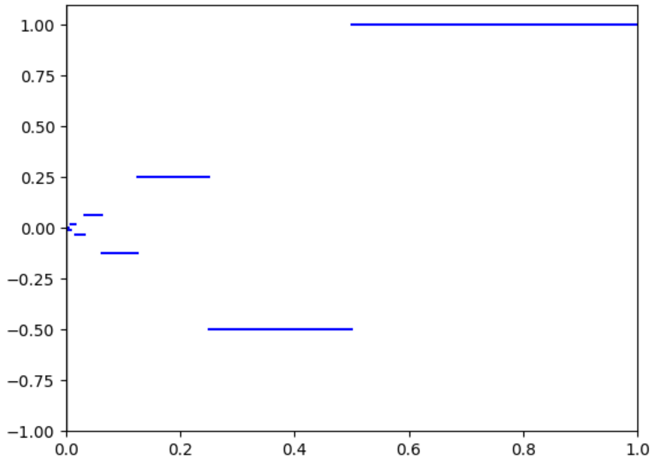
Mit dem Zwischenwertsatz finden wir ein y zwischen x_M und x_m, so dass $f(y) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.
Natürlich ist $y \in [a,b]$. □

Aufgabe 6. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} (-2)^{-n} & \text{falls } 2^{-(n+1)} < x \leq 2^{-n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Ist die Funktion f eine Treppenfunktion? Ist sie stetig oder monoton? Zeigen Sie, dass f integrierbar ist, und berechnen Sie das Integral.

Lösung. Die Funktion f ist keine Treppenfunktion, weil f unendliche viele verschiedene Werte annimmt.



Ausserdem ist f weder stetig noch monoton. Wir können $f = f_+ - f_-$ in Positiv- und Negativteil zerlegen, wobei

$$f_+(x) = \begin{cases} 2^{-2n}, & \text{falls } 2^{-(2n+1)} < x \leq 2^{-2n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

und

$$f_-(x) = \begin{cases} 2^{-(2n+1)}, & \text{falls } 2^{-(2n+2)} < x \leq 2^{-(2n+1)} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beide Funktionen f_+, f_- sind monoton wachsend, darum Riemann-integrierbar und somit auch f.

Wir berechnen jetzt die Integrale von f_+ und f_-. Sei für jedes $\mathbb{N} \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$u_N : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

definiert durch

$$u_N(x) = \begin{cases} 2^{-2n}, & \text{falls } 2^{-(2n+1)} < x \leq 2^{-2n} \text{ für ein } n \leq N \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion u_N ist eine Treppenfunktion und $u_N \leq f_+$. Ihr Integral ist

$$\int_0^1 u_N(x)dx = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{2n}} \left(\frac{1}{2^{2n}} - \frac{1}{2^{2n+1}} \right) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{4n+1}} = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{16}}.$$

Somit gilt

$$\sup \int_0^1 u_N dx = \frac{8}{15} \leq \sup \mathcal{U}(f).$$

Ähnlich definieren wir

$$v_N(x) = \begin{cases} 2^{-2n}, & \text{falls } 2^{-(2n+1)} < x \leq 2^{-2n} \text{ für ein } n \leq N \\ 2^{-2N}, & x \leq 2^{-(2N+1)} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

so dass $v_N \geq f_+$ und v_N eine Treppenfunktion ist. Dann haben wir

$$\int_0^1 v_N(x)dx = \int_0^1 u_N(x)dx + 2^{-2N} \cdot 2^{-(2N+1)}.$$

Also

$$\inf \int_0^1 v_N dx = \frac{8}{15} \geq \inf \mathcal{O}(f)$$

und darum $\int_0^1 f_+ dx = \frac{8}{15}$.

Ähnlich berechnen wir $\int_0^1 f_- dx = \frac{2}{15}$. Dies sieht man auch direkt daraus, dass die Höhe der Treppen und die Breite der Treppen im Vergleich zu f_+ je halbiert werden). Daraus schliessen wir

$$\int_0^1 f dx = \int_0^1 f_+ dx - \int_0^1 f_- dx = \frac{6}{15}.$$

□

Aufgabe 7. Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, und $\lambda > 0$ eine reelle Zahl. Sei $g : [\lambda a, \lambda b] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion, welche durch $g(x) = f(\lambda^{-1}x)$ definiert wird. Zeigen Sie, dass g integrierbar ist, und dass

$$\lambda \int_a^b f(x)\, dx = \int_{\lambda a}^{\lambda b} g(x)\, dx$$

gilt.

Lösung. Wir beweisen die Aussage zuerst für Treppenfunktionen: Sei $v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion $v = \mathbb{1}_{[c,d]}$ eines Intervalles $[c, d] \subseteq [a, b]$. Also

$$v(x) = \begin{cases} 1, & x \in [c, d] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die dazugehörige Funktion $u : [\lambda a, \lambda b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $u(x) = v(\lambda^{-1}x)$ hat Wert 1 genau dann, wenn $\lambda^{-1}x \in [c, d]$, also $x \in [\lambda c, \lambda d]$. Das heisst, u ist die charakteristische Funktion des Intervalles $[\lambda c, \lambda d]$.
Die Integrale der beiden Funktionen sind:

$$\int_a^b u(x)dx = d - c \qquad \text{und} \qquad \int_{\lambda a}^{\lambda b} v(x)dx = \lambda(d - c).$$

Die gewünschte Aussage stimmt also für charakteristische Funktionen. Für allgemeine Treppenfunktionen folgt die Aussage aus der Linearität des Integrals.

Die Aussage für integrierbare Funktionen $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist wahr: Sei $g : [\lambda a, \lambda b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = f(\lambda^{-1}x)$ wie in der Aufgabenstellung. Dann folgt für eine allgemeine

Treppenfunktion mit v und u gegeben wie oben durch $u(x) = v(\lambda^{-1}x)$, dass $u \leq f$ genau dann wenn $v \leq g$ und dass $u \geq f$ genau dann wenn $v \geq g$. Also ist $\lambda\mathcal{U}(f) = \mathcal{U}(g)$ und $\lambda\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(g)$. Für die Integrale haben wir folglich:

$$\lambda \int_a^b f(x)dx = \lambda \sup \mathcal{U}(f) = \sup \mathcal{U}(g) \leq \int_{\lambda a}^{\lambda b} g(x)dx \leq \inf \mathcal{O}(g) = \lambda \inf \mathcal{O}(f) = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

Wir schliessen, dass g integrierbar ist mit $\int_{\lambda a}^{\lambda b} g(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$. □

Aufgabe 8. Was ist der Wert des Integrals der Funktion g von Aufgabe 2?
Hinweis: Suchen Sie auf dem Internet.

Lösung. $1-\gamma$, wobei γ die Euler-Mascheroni Konstante ist: https://de.wikipedia.org/wiki/Euler-Mascheroni-Konstante □

Aufgabe 9. Multiple choice Aufgaben.

(1) Was ist der Wert des Integrals

$$\int_0^3 \max(1-x, x-1)\ dx\ ?$$

 (a) 0,
 (b) $\frac{1}{\pi}$,
 (c) $\underline{\frac{5}{2}}$,
 (d) 1.

(2) Sei $n \in \mathbb{N}$. Was ist der Wert des Integrals

$$\int_0^1 \frac{\lfloor nx^2 \rfloor}{n}\ dx\ ?$$

 (a) 0,
 (b) $\underline{\sqrt{\frac{1}{n^3}} \sum_{k=1}^{n-1} k(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}$,
 (c) $\sqrt{\frac{1}{n^3}} \sum_{k=1}^{n-1} k(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})$,
 (d) $\sqrt{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})$.

(3) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ Riemann-integrierbare Funktionen mit

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

für alle $x \in [a,b]$. Folgt hieraus $f \leq g$?

 (a) Ja.
 (b) Ja, falls f und g stetig sind.
 (c) Ja, falls f und g stetig sind und $f(a) = g(a)$.
 (d) <u>Keine der obigen Antworten ist richtig.</u>

(4) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Positiv- und Negativteil f^+ und f^- von f seien definiert wie in Abschnitt 4.3.2 des Skripts. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

 (a) Ist f^+ Riemann-integrierbar, so sind f^-, f und $|f|$ Riemann integrierbar.

(b) Ist $|f|$ Riemann-integrierbar, so sind f^+, f^- und f Riemann-integrierbar.

(c) Sind zumindest zwei der Funktionen f, $|f|$, f^+, f^- Riemann-integrierbar, so sind alle dieser Funktionen Riemann-integrierbar.

(d) Keins der Obigen.