Lösungen zur Übungsserie 8

Aufgabe 1. Berechnen Sie folgenden Grenzwerte anhand der Definition.

(1)
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(ni+2)^2}{n^2 i}$$

(3)
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{i}{i+1}\right)^n$$

(4)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(4+5i)n^2+(3+i)^n}$$

Lösung.

(1) Es gilt $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, welche gegen 0 strebt.

(2) Bemerke:
$$\frac{(ni+2)^2}{n^2 i} = \frac{-1+\frac{2i}{n}+\frac{4}{n^2}}{i}$$
Naturlich ist $\left|\frac{2i}{n}\right| = \frac{2}{n} \to 0$ und $\frac{4}{n^2} \to 0$. Somit ist
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(ni+2)^2}{n^2 i} = \frac{-1}{i} = i$$

(3) Bemerke:
$$\left|\frac{i}{i+1}\right| = \frac{1}{2}$$
Somit ist $\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{i}{i+1}\right)^n\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$ und so
$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{i}{i+1}\right)^n\right| = 0$$
per Aufgabe 6.

(4) Wir zeigen $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(4+5i)n^2+(3+i)^n} = 0$ via
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{(4+5i)n^2+(3+i)^n}\right| = 0$$

plus Aufgabe 6. Bemerke: $\frac{n^2}{(4+5i)n^2+(3+i)^n} = \frac{1}{(4+5i)+\frac{(3+i)^n}{n^2}}$. Wir zeigen $\lim_{n\to\infty} |(4+5i)+\frac{(3+i)^n}{n^2}| = \infty$. Es gilt

$$\left|(4+5i)+\frac{(3+i)^n}{n^2}\right| \geq \left|\frac{(3+i)^n}{n^2}\right| = \frac{\sqrt{10}^n}{n^2} \to \infty$$

$\square$

Aufgabe 2. Seien $(a_n)_{n=1}^\infty$ und $(b_n)_{n=1}^\infty$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$$

gilt. Zeigen Sie auch, dass Gleichheit nicht immer gilt.

Lösung. Erinnerung:

$$\liminf_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k$$

Sei $N \in \mathbb{N}$. Natürlich haben wir, dass für alle $n \geq N$ $a_n \geq \inf_{k\geq N} a_k$ und $b_n \geq \inf_{k\geq N} b_k$ gilt. Insbesondere gilt

$$a_n + b_n \geq \inf_{k\geq N} a_k + \inf_{k\geq N} b_k$$

für alle $n \geq N$. Da dies für alle $n \geq N$ gilt, erhalten wir

$$\inf_{n\geq N}(a_n+b_n) \geq \inf_{k\geq N} a_k + \inf_{k\geq N} b_k$$

Da $(a_n)_{n=1}^\infty$ und $(b_n)_{n=1}^\infty$ beschränkte Folgen sind, konvergieren die Folgen $\inf_{n\geq N}(a_n+b_n)$, $\inf_{k\geq N} a_k$ und $\inf_{k\geq N} b_k$. Da lim mit + kommutiert, erhalten wir aus der Sandwitch-Lemma, dass

$$\lim_{N\to\infty}\inf_{n\geq N}(a_n+b_n) \geq \lim_{N\to\infty}\inf_{k\geq N} a_k + \lim_{N\to\infty}\inf_{k\geq N} b_k$$

i.e. die Behauptung.

Gegenbeispiel für Gleichheit: $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$. $\liminf a_n = \liminf b_n = -1$, aber $a_n + b_n = 0$. $\square$

Aufgabe 3. Sei $(z_n)_{n=1}^\infty$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Folge der Cesàro-Mittel $(w_n)_{n=1}^\infty$, gegeben durch

$$w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k$$

für $n \geq 1$ konvergiert, und denselben Grenzwert wie $(z_n)_{n=1}^\infty$ hat. Überzeugen Sie sich auch davon, dass die umgekehrte Implikation nicht gilt, das heisst, dass die Konvergenz der Cesàro-Mittel nicht Konvergenz der Folge impliziert.

Lösung. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Da $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert, können wir $N \in \mathbb{N}$ wählen, so dass für alle $n \geq N$

$$|z_n - A| < \epsilon/2$$

gilt, wobei A der Grenzwert von $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ bezeichnet.
Wähle nun $M \geq N$, so dass

$$\left|\sum_{k=1}^{N}(z_k - A)\right| < M$$

Es folgt, dass für alle $m \geq \frac{2M}{\epsilon}$ gilt, dass

$$\begin{aligned}
|w_m - A| &= \frac{1}{m}\left|\sum_{k=1}^{N}(z_k - A) + \sum_{k=N+1}^{m}(z_k - A)\right| \\
&\leq \frac{1}{m}\left|\sum_{k=1}^{N}(z_k - A)\right| + \sum_{k=N+1}^{m}|(z_k - A)| \\
&< \frac{1}{m}\Big(M + (m-N)\epsilon/2\Big) \leq \frac{1}{m}\Big(m\epsilon/2 + (m-N)\epsilon/2\Big) \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Daraus schliessen wir, dass $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert.

Die umgekehrte Implikation gilt nicht. Sei $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ gegeben durch

$$z_n = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

$(z_n)_{n=1}^{\infty}$ ist nicht konvergent. Es gilt jedoch, dass $w_n = \frac{1}{n}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ für alle $n \geq 1$ ist. Somit erhalten wir, dass $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \frac{1}{2}$ gilt. □

Aufgabe 4. Sei $D \subset \mathbb{R}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge auf D und $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmässig stetig. Zeigen Sie, dass dann auch $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge ist. Belegen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass dies für lediglich stetiges f nicht notwendigerweise gilt.

Lösung. Erinnerung:

(1) f ist gleichmässig stetig falls für alle $\varepsilon > 0$ es existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ gilt;
(2) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist eine Cauchy-Folge falls für alle $\varepsilon > 0$ es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq N$ $|a_n - a_m| < \varepsilon$ gilt.

Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen ein $\delta > 0$ wie in der Definition von gleichmässige Stetigkeit. Aus der Definition von Cauchy-Folge wissen wir, dass ein $N_\delta \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $m, n \geq N_\delta$ $|a_m - a_n| < \delta$ gilt. Dann ist aber $|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$, i.e. $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ ist eine Cauchy-Folge.

Gegenbeispiel: Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definiert durch $a_n := \frac{1}{n}$. Dies ist eine Cauchy-Folge. Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \frac{1}{x}$. Dann ist $f(a_n) = n$, welche natürlich keine Cauchy-Folge ist. □

Aufgabe 5. (1) Die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_1 := 1, \quad x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert. Was passiert falls wir $x_1 = a$ für ein $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$, setzen?

Hinweis: Betrachten Sie zuerst $(x_{2n})_n$.

(2) Die Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ der Fibonacci-Zahlen ist rekursiv definiert durch

$$f_1 := 0, \quad f_2 := 1, \quad f_{n+2} := f_{n+1} + f_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi$$

gilt, wobei ϕ den Grenzwert aus Teilaufgabe (1) bezeichnet.

Lösung.

(1) Die erste Feststellung ist, dass aufgrund der Rekursionsformel und des Startwerts $x_1 = 1$ die Folge $(x_n)_n$ durch 1 nach unten beschränkt ist. Weiters muss der Grenzwert $x = \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n$ falls er existiert die Fixpunktgleichung

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

erfüllen, wie durch Durchführung des Grenzübergangs in der Rekursionsformel folgt. Diese Gleichung hat als einzige Lösungen die Zahlen $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Da $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ ist, bleibt als einziger Kandidat für den Grenzwert der goldene Schnitt $\phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ übrig. Wir präsentieren nun zwei Möglichkeiten für den Beweis, dass tatsächlich $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = \phi$ gilt.

Monotone Teilfolgen: Durch Berechnen einiger Folgenglieder gelangt man zur Vermutung, dass sich die Teilfolge $(x_{2n-1})_n$ der ungeraden Folgenglieder von unten monoton wachsend an ϕ annähert, während $(x_{2n})_n$ von oben monoton fallend gegen ϕ strebt. Die 2-Schritt-Rekursionsgleichung für x_n (welche die Rekursionsgleichung für die ungerade und gerade Teilfolge darstellt) lautet

(1) $$x_{n+2} = 1 + \frac{1}{x_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x_n}} = 1 + \frac{x_n}{x_n+1}.$$

Durch Umformen sieht man anhand dessen, dass für $n \in \mathbb{N}$ sowohl

$$x_{n+2} \geq x_n \iff \left(x_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \leq 0 \iff x_n \leq \phi$$

als auch

$$x_{n+2} \leq \phi \iff x_n \leq \phi\phi$$

gilt. Wegen $x_1 = 1 \leq \phi$ und $x_2 = 2 \geq \phi$ folgt aus diesen Äquivalenzen, dass die Teilfolge $(x_{2n-1})_n$ durch ϕ nach oben beschränkt und monoton wachsend ist, während $(x_{2n})_n$ durch ϕ nach unten beschränkt und monoton fallend ist. Satz 5.34 über die Konvergenz von monotonen Folgen impliziert also die Konvergenz dieser Teilfolgen. Bestimmen der positiven Lösungen der zur 2-Schritt-Rekursionsgleichung

(1) gehörigen Fixpunktgleichung $x = 1 + \frac{x}{x+1}$ ergibt, dass wiederum nur ϕ als Grenzwert in Frage kommt. Es gilt also $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_{2n} = \phi = \lim_{n\longrightarrow\infty} x_{2n-1}$, und damit $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = \phi$.

Geometrische Folge als obere Schranke: Wir wollen direkt zeigen, dass der Abstand $|x_n - \phi|$ gegen 0 strebt und untersuchen deshalb den Zusammenhang zwischen $|x_{n+1} - \phi|$ und $|x_n - \phi|$. Wir finden

$$|x_{n+1} - \phi| = \left|1 + \frac{1}{x_n} - \left(1 + \frac{1}{\phi}\right)\right| = \frac{|x_n - \phi|}{x_n\phi} \leq \phi^{-1} |x_n - \phi|,$$

wobei wir die Rekursionsgleichung, $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$ und $x_n \geq 1$ verwendet haben. Induktiv folgt

$$0 \leq |x_{n+1} - \phi| \leq \phi^{-n} |x_1 - \phi|.$$

Wegen $\phi^{-1} < 1$ strebt ϕ^{-n} für $n \longrightarrow \infty$ gegen 0, und zusammen mit dem Sandwichlemma zeigt dies

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} |x_n - \phi| = 0,$$

also $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = \phi$.

(2) Es gilt $f_n > 0$ für alle $n \geq 2$. Wir können die Rekursionsformel also durch f_{n+1} dividieren und erhalten

$$f_{n+2}/f_{n+1} = 1 + \frac{1}{f_{n+1}/f_n}$$

für $n \geq 1$. Weiters gilt $f_3/f_2 = 1$. Also ist $(f_{n+2}/f_{n+1})_n$ genau die Folge $(x_n)_n$ aus (a) (sie hat denselben Startwert und erfüllt dieselbe Rekursionsgleichung) und konvergiert somit gegen ϕ. Die Indexverschiebung ist für den Grenzwert natürlich irrelevant, also folgt auch $\lim_{n\longrightarrow\infty} f_{n+1}/f_n = \phi$.

□

Aufgabe 6. Sei $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die reelle Folge $(|z_n|)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert. Gilt die umgekehrte Implikation auch? Begründen Sie.

Lösung. Sei $\epsilon > 0$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|z_n - z| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Durch die umgekehrte Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\big||z_n| - |z|\big| \leq |z_n - z| < \epsilon$$

für alle $n \geq N$. Somit folgt, dass die Folge $(|z_n|)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert, mit Grenzwert $|z|$.

Die Umkehrung gilt nicht: Sei $z_n = (-1)^n$. Es gilt $|z_n| = 1$. Somit konvergiert $(|z_n|)_{n=0}^{\infty}$ gegen 1. Die Folge z_n konvergiert aber nicht. □

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgabe.

(1) Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen nicht?

(a) Falls $\lim_{n\to\infty} a_n \in \{-\infty, \infty\}$ gilt, dann ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$;

(b) Falls $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt, dann ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \in \{-\infty, \infty\}$;
(c) Falls $\lim_{n\to\infty} |a_n| \in \{-\infty, \infty\}$ gilt, dann ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|} = 0$;
(d) Falls $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ gilt, dann ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|} = \infty$.

(2) Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine reelle Folge, so dass $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 1$. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?
(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$;
(b) $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n = 0$;
(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$;
(d) $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n = 1$.

(3) Seien $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ reelle Folgen mit Grenzwerte $a, b \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?
(a) Falls $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $a < b$;
(b) Falls $a_n \leq b_n$ für alle bis endlich viele $n \in \mathbb{N}$, dann ist $a \leq b$;
(c) Falls $a \leq b$, dann ist $a_n < b_n$ für alle bis endlich viele $n \in \mathbb{N}$;
(d) Falls $a < b$, dann ist $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(a) $(a_n)_n$ hat eine konvergente Teilfolge,
(b) Jede konvergente Teilfolge von $(a_n)_n$ ist beschränkt,3
(c) Jede monotone Teilfolge von $(a_n)_n$ konvergiert,
(d) Jede divergente Teilfolge von $(a_n)_n$ ist unbeschränkt