Lösungen zur Übungsserie 9

Aufgabe 1. (1) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x-2},\qquad \lim_{x\to -5}\frac{x+2}{\sqrt{1-x}-2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$$

Wählen Sie dabei in jedem Fall einen geeigneten Definitionsbereich, auf dem die angegebene Formel eine Funktion definiert.

(2) Sei $p\in\mathbb{R}[T]$ ein Polynom, $p(T)=a_nT^n+\cdots+a_1T+a_0$ und sei $x_0\in\mathbb{R}$. Berechnen Sie

$$\lim_{x\to x_0}\frac{p(x)-p(x_0)}{x-x_0}$$

Lösung.

(1) (a) Definitionsbereich: $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Es gilt:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}x^2+x+1=7$$

(b) Definitionsbereich: $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$. Es gilt

$$\lim_{x\to -5}\frac{x+2}{\sqrt{1-x}-2}=\frac{-3}{\sqrt{6}-2}$$

(c) Definitionsbereich: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Es gilt

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{x}{|x|}=1$$

und

$$\lim_{x\nearrow 0}\frac{x}{|x|}=-1$$

und somit existiert $\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$ nicht.

(2) Sei $p(T)=T^n$. Wir haben $p(x)-p(x_0)=x^n-x_0^n$ und sehen, dass x_0 eine Nullstelle ist, die Polynomdivision also keinen Rest haben soll. Wir erhalten

$$\frac{p(x)-p(x_0)}{x-x_0}=x^{n-1}+x_0x^{n-2}+\ldots+xx_0^{n-2}+x_0^{n-1}.$$

Darum erhalten wir

$$\lim_{x\to x_0}\frac{p(x)-p(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left(x^{n-1}+x_0x^{n-2}+\ldots+xx_0^{n-2}+x_0^{n-1}\right)=nx_0^{n-1}.$$

Für ein beliebiges Polynom $p(T)=a_nT^n+\cdots+a_1T+a_0$, definieren wir

$$q(T)=a_nnT^{n-1}+a_{n-1}(n-1)T^{n-2}+\ldots+a_1,$$

was durch Linerität in der Tat der Grenzwert von $\frac{p(x)-p(x_0)}{x-x_0}$ bei x_0 ist.

$\square$

Aufgabe 2. Finden Sie ein Beispiel für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass der Grenzwert der Folge $(f(n))_n$ existiert, aber nicht der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Wie übersetzt man für eine reelle Zahl $A \in \mathbb{R}$ die Aussage

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

korrekt in eine Aussage über Konvergenz von Folgen? Beweisen Sie!

Lösung. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ geben durch $f(x) = \inf\limits_{k\in\mathbb{Z}} |x-k|$. Wir wissen, dass f stetig ist (siehe Serie 5). Es ist aber $f(n) = 0$ und $f(n+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existiert also nicht.

Die Korrekte Übersetzung lautet: Für eine reelle Zahl A sind die Aussagen

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$

(2) Für jede Folge reeller Zahlen $(x_n)_n$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

äquivalent. Der Beweis ist analog zum Folgenkriterium 6.102 für Grenzwerte gegen $x_0 \in \mathbb{R}$ anstatt gegen ∞. $\square$

Aufgabe 3. Sei V der Vektorraum aller beschränkten Folgen $(x_n)_n$ in $\mathbb{R}$. Überprüfen Sie, dass

$$\|(x_n)_n\|_\infty = \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{und} \qquad \|(x_n)_n\|_* = \sup\{2^{-n}|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Normen $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_*$ auf V definieren. Finden Sie eine Folge $(v_n)_n$ in V, die für die Norm $\|\cdot\|_*$ konvergiert, aber nicht für die Norm $\|\cdot\|_\infty$.

Lösung. $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm:

Definitheit: Wir bemerken, dass $\|(x_n)_n\|_\infty \geq 0$ für alle $(x_n)_n \in V$. Falls $(x_n)_n$ die Nullfolge ist ($x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$), gilt $\|(x_n)_n\|_\infty = 0$. Falls $\|(x_n)_n\|_\infty = 0$ ist, gilt $|x_n| \leq \|(x_n)_n\|_\infty = 0$ für alle $n \geq 0$. Somit sind $x_n = 0$ für alle $n \geq 0$, also ist $(x_n)_n$ die Nullfolge.

Homogenität: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $(x_n)_n \in V$. Dann ist $\alpha \cdot (x_n)_n = (\alpha x_n)_n$ auch eine beschränkte Folge und darum in V. Für die Norm haben wir

$$\|(\alpha x_n)_n\|_\infty = \sup\{|\alpha x_n| \mid n \in \mathbb{N}\} = |\alpha| \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\} = |\alpha| \|(x_n)_n\|_\infty.$$

Dreiecksungleichung: Seien $(x_n)_n \in V$ und $(y_n)_n \in V$. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|(x_n)_n + (y_n)_n\|_\infty &= \sup\{|x_n + y_n| \mid n \in \mathbb{N}\} \\
&\leq \sup\{|x_n| + |y_n| \mid n \in \mathbb{N}\} \\
&\leq \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\} + \sup\{|y_n| \mid n \in \mathbb{N}\} \\
&= \|(x_n)_n\|_\infty + \|(y_n)_n\|_\infty.
\end{aligned}$$

$\|\cdot\|_*$ ist eine Norm: ist Schritt für Schritt dasselbe Argument.

Eine explizite Folge von Folgen: Für ein $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $v_n \in V$ die Folge $v_n = (x_k^n)_{k=0}^{\infty}$ gegeben durch

$$x_k^n = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt $\|v_n\|_\infty = 1$, sowie $\|v_n\|_* = 2^{-n}$. Es existiert also keine Konstante $A > 0$ mit der Eigenschaft, dass $\|v\|_\infty \leq A \cdot \|v\|_*$ für alle $v \in V$ gilt.

Die Folge $(v_n)_n$ divergiert in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm, da $\|v_n\|_\infty = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, der Grenzwert kann also nicht Null sein (Null in V ist die Folge $(x_n)_n$ mit $x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$). In der $\|\cdot\|_*$-Norm konvergiert $(v_n)_n$ gegen die Nullfolge. □

Aufgabe 4. Sei $a > 0$ eine reelle Zahl, und seien $v, w \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass die Abschätzung

$$|\langle v, w \rangle| \leq \tfrac{a^2}{2}\|v\|^2 + \tfrac{1}{2a^2}\|w\|^2$$

gilt. Schliessen Sie daraus auf die Cauchy-Schwarz Ungleichung.

Lösung. Unter Benutzung der Bilinearität und Symmetrie des Skalarproduktes berechnen wir

$$\begin{aligned} 0 \leq \|av - a^{-1}w\|^2 &= \left\langle av - a^{-1}w, av - a^{-1}w \right\rangle \\ &= a \cdot a \langle v, v \rangle - a \cdot a^{-1} \langle v, w \rangle - a^{-1} \cdot a \langle w, v \rangle + a^{-1} \cdot a^{-1} \langle w, w \rangle \\ &= a^2\|v\|^2 - 2\langle v, w \rangle + \frac{1}{a^2}\|w\|^2. \end{aligned}$$

Somit ist $\langle v, w \rangle \leq \frac{a^2}{2}\|v\|^2 + \frac{1}{2a^2}\|w\|^2$.

Analog erhalten wir die Ungleichung

$$0 \leq \|av + a^{-1}w\|^2 = a^2\|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \frac{1}{a^2}\|w\|^2.$$

Also $-\langle v, w \rangle \leq \frac{a^2}{2}\|v\|^2 + \frac{1}{2a^2}\|w\|^2$. Somit gilt

$$|\langle v, w \rangle| \leq \tfrac{a^2}{2}\|v\|^2 + \tfrac{1}{2a^2}\|w\|^2.$$

Cauchy-Schwarz: Setzen wir für $v \neq 0$ und $w \neq 0$ den Zahlenwert $a = \sqrt{\frac{\|w\|}{\|v\|}}$ ein. Mit $a^2 = \frac{\|w\|}{\|v\|}$ und der hergeleiteten Ungleichung erhalten wir

$$|\langle v, w \rangle| \leq \frac{1}{2}\|w\|^2\|v\|^2 + \frac{1}{2}\|v\|^2\|w\|^2 = \|v\|^2\|w\|^2.$$

□

Aufgabe 5. Sei $(a_n)_n$ eine reelle unbeschränkte Folge. Beweisen Sie, dass eine eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ mit

$$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} \in \{-\infty, \infty\}$$

existiert.

Lösung. OBdA: $(a_n)_n$ ist von oben unbeschränkt. Erinnerung: das heisst, dass es kein $M \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, i.e. für alle $M \in \mathbb{N}$ es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ so dass $a_n \geq M$.
Wir konstruieren eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ mit

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$$

Wähle $n_1 \in \mathbb{N}$ so dass $a_{n_1} > 1$. Das ist möglich da $(a_n)_n$ ist von oben unbeschränkt. Dann, für $k \geq 2$, wir wählen $n_k > n_{k-1}$ so dass

$$a_{n_k} > k \text{ und } a_{n_k} > a_{n_{k-1}}$$

Wir können immer eine solche k finden, da $(a_n)_n$ von oben unbeschränkt ist: angenommen, dass eine solche k existiert nicht, dann es folgt, dass

$$a_n \leq \max(k,\ a_{n_{k-1}})$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, was ein Widerspruch ist, da a_n ist von oben unbeschränkt.
Da $(a_{n_k})_k$ ist per Konstruktion streng monoton wachsend und unbeschränkt, wir erhalten

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$$

$\square$

Aufgabe 6. Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt und $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Zeigen Sie folgende Eigenschaften von Grenzwerten.

(1) Falls $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert, ist er eindeutig bestimmt;
(2) $\lim_{x\to x_0}$ ist linear, i.e.

$$\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

und

$$\lim_{x\to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$'
(3) $\lim_{x\to x_0}$ ist monoton, i.e. falls $f \leq g$, dann

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$$

(4) $\lim_{x\to x_0}$ ist multiplikativ, i.e.

$$\lim_{x\to x_0} (fg)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

(5) Formulieren und beweisen Sie ein Sandwich-Lemma für $\lim_{x\to x_0}$.

Lösung.

(1) Wir nehmen an, dass $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert aber nicht eindeutig bestimmt ist: seien $A \neq B$ die Grenzwerte von f für $x \to x_0$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach der Definition von lim es existieren $\delta_A, \delta_B > 0$ so dass

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

für alle $x \in (x_0 - \delta_A, x_0 + \delta_A)$ und

$$|f(x) - B| \leq \varepsilon$$

für alle $x \in (x_0 - \delta_B, x_0 + \delta_B)$. Sei $\delta = \min(\delta_A, \delta_B)$ und wähle ein $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (dies existiert da x_0 ein Häufungspunkt von D ist). Dann ist

$$|A - B| \leq |f(x) - A| + |f(x) - B| < 2\varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, es folgt $A = B$.

(2) Seien $A := \lim_{x\to x_0} f(x)$ und $B := \lim_{x\to x_0} g(x)$. Wir zeigen

$$\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = A + B$$

i.e. dass für alle $\varepsilon > 0$ es existiert ein $\delta > 0$ so dass

$$|f(x) + g(x) - A - B| \leq \varepsilon$$

für jede $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Wir wissen, dass für alle $\varepsilon > 0$ $\delta_f, \delta_g > 0$ existieren, so dass

$$|f(x) - A| \leq \varepsilon/2$$

für alle $x \in (x_0 - \delta_f, x_0 + \delta_f)$, und

$$|g(x) - B| \leq \varepsilon/2$$

für alle $x \in (x_0 - \delta_g, x_0 + \delta_g)$. Sei $\delta := \min(\delta_f, \delta_g)$, dann für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ wir erhalten

$$|f(x) - A| + |g(x) - B| \leq \varepsilon$$

Dies zeigt die Behauptung, da $|f(x) + g(x) - A - B| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B|$.

(3) Seien $A := \lim_{x\to x_0} f(x)$ und $B := \lim_{x\to x_0} g(x)$. Wir nehmen an, dass $f \leq g$ und $A > B$. Sei $\varepsilon := \frac{A-B}{2}$. Dann es existieren δ_f, δ_g wie in (2); sei $\delta := \min(\delta_f, \delta_g)$. Sei $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Dann haben wir

$$|f(x) - A| \leq \varepsilon$$

i.e. $\frac{A+B}{2} = A - \varepsilon \leq f(x) \leq A + \varepsilon$ und

$$|g(x) - B| \leq \varepsilon$$

i.e. $B - \varepsilon < g(x) < B + \varepsilon = \frac{A+B}{2}$. Wir haben ein $x \in D$ s.d. $f(x) > g(x)$ gefunden, ein Widerspruch.

(4) Seien $A := \lim_{x\to x_0} f(x)$ und $B := \lim_{x\to x_0} g(x)$. Sei $1 > \varepsilon > 0$. Dann es existieren $\delta_f, \delta_g > 0$ so dass

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2(1+|B|)}$$

für alle $x \in (x_0 - \delta_f, x_0 + \delta_f)$, und

$$|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2(1+|A|}$$

für alle $x \in (x_0 - \delta_g, x_0 + \delta_g)$. Sei $\delta > 0$ klein genug, so dass $\delta \leq \min(\delta_f, \delta_g)$ und $|g(x) - B| \leq 1$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Dann haben wir

$$|f(x)g(x) - AB| = |f(x)g(x) - Ag(x) + Ag(x) - AB| <\leq |g(x)||f(x) - A| + |A|(g(x) - B)|$$
$$<< (1+|B|)\frac{\varepsilon}{2(1+|B|} + (1+|A|)\frac{\varepsilon}{2(1+|A|} = \varepsilon$$

(5) Formulierung: Seien $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ so dass $f \leq g \leq h$ und

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = A$$

. Dann existiert $\lim_{x\to x_0} g(x)$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$.

Dies folgt direkt aus (3) angewandt auf links-rechtseitige Grenzwerte:

$$A = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \leq \lim_{x\to x_0^-} g(x) \leq \lim_{x\to x_0^+} g(x) \leq \lim_{x\to x_0^+} h(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = A$$

$\square$

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgabe.

(1) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann können wir die Existenz von $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (Grenzwert der Funktion f für $x \to \infty$) und $\lim_{n\to\infty} f(n)$ (Grenzwert der Folge $(f(n))_n$) untersuchen. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?
  - (a) Existiert $\lim_{n\to\infty} f(n)$, so existiert auch $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und die beiden Grenzwerte stimmen überein.
  - (b) Existiert $\lim_{n\to\infty} f(n)$ und ist f monoton, so existiert auch $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und die beiden Grenzwerte stimmen überein.
  - (c) Existiert $\lim_{n\to\infty} f(n)$ und ist f stetig, so existiert auch $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und die beiden Grenzwerte stimmen überein.
  - (d) Keins der Obigen.

(2) Seien $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. In welchen der folgenden Fälle folgt die Stetigkeit von f in x_0 nicht?
  - (a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
  - (b) x_0 ist links- und rechtsseitiger Häufungspunkt von D und f ist in x_0 links- und rechtsseitig stetig.
  - (c) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert.
  - (d) x_0 ist kein rechtsseitiger Häufungspunkt von D und es gilt $\lim_{x\nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

(3) Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{|x|}$ ist...
  - (a) Riemann-integrierbar,
  - (b) Lipschitz-stetig,

(c) nicht beschränkt,

(d) monoton.

(4) Welche Aussage gilt für alle stetigen Funktionen $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$?

(a) Es gibt ein $M > 0$ so dass $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in (-1,1)$.

(b) Es gibt ein $x_0 \in (-1,1)$ so dass $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in (-1,1)$.

(c) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so dass für alle $x_0, x_1 \in (-1,1)$, $|x_1 - x_0| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_0)|$.

(d) Falls $f(0) = 10$ und $f(1/10) = 1$ dann gibt es ein $x_0 \in (-1,1)$ so dass $f(x_0) = 9$.

(5) Für alle beschränkten reellen Folgen $(a_n)_n$ gilt:

(a) $a_k \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) $\liminf_{n\to\infty} a_n < \limsup_{n\to\infty} a_n$.

(c) Es gibt eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ die gegen $\limsup_{n\to\infty} a_n$ konvergiert.

(d) $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.