Lösungen zur Übungsserie 10

Aufgabe 1. (1) Entscheiden Sie, welche der folgenden Reihen komplexer Zahlen konvergieren.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log(\tfrac{n+1}{n})$ (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)^n}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \tfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\tfrac{1}{n^2}\right)$

(2) Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen reeller Zahlen konvergieren, und berechnen Sie die Grenzwerte.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1}$

Hinweis: Faktorisieren Sie den Nenner in zwei quatratische Terme.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl mit $|x| \leq \frac{1}{2}$. Betrachten Sie die Folge $\sum_{n=0}^{\infty} x^n F_n$, wobei F_n für die n-te Fibonacci Zahl steht, also $F_0 = 0, F_1 = 1$ und rekursiv $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$.

Hinweis: Für die Konvergenz der Reihe zeigen Sie, dass $F_n \leq \phi^n$ gilt, wobei $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ der goldene Schnitt ist.

Lösung.

(1) (a) Divergiert: Durch die Indexverschiebung $n = m - 1$, wollen wir die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m-1}{(m-1)^2+1}$ analysieren. Sei $a_m = \frac{m-1}{(m-1)^2+1}$. Doch dann ist $a_m = \frac{m-1}{m^2-2m+2} \geq \frac{m-1}{m^2} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} =: b_m$ weil $m \geq 1$ ist. Die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konvergiert aber nicht, da $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$ konvergiert aber $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$, die harmonische Reihe, divergiert. Aus $0 \leq b_m \leq a_m$ folgt aus dem Majorantenkriterium, dass $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ nicht konvergiert.

(b) Konvergiert: Wir prüfen das Leibnizkriterium: Sei (a_n) die Folge definiert durch $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Es gilt

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- $a_n \geq 0$
- $a_n \geq a_{n+1}$, da aus $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ die Ungleichung $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ folgt.

Darum konvergiert die Reihe.

(c) Konvergiert: Weil $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert die in der Aufgabe gegebene Reihe sogar absolut.

(d) Konvergiert: Für $n \geq 1$ haben wir $n! \geq n$. Darum ist $\frac{1}{(n!)^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Mit dem Majorantenkriterium konvergiert die Reihe.

(e) Divergiert: Wir nutzen, dass $\log(st) = \log(s) + \log(t)$ für $s, t > 0$ gilt . Darum haben wir für $N \in \mathbb{N}$ eine Teleskopsumme

$$\sum_{n=1}^{N} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N} (\log(n+1) - \log(n)) = \log(N+1) - \log 1.$$

Weil log nach Aufgabe **??**(b) unbeschränkt wächst, divergiert die Summe für $N \longrightarrow \infty$.

(f) Konvergiert: Wir nutzen das Wurzelkriterium. Sei $a_n = \frac{1}{\log(n)^n}$. Dann konvergiert

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{\log(n)^n}} = \frac{1}{\log(n)}$$

gegen 0 (da log unbeschränkt ist). Darum konvergiert die Reihe.

(g) Konvergiert: Nach dem Majorantenkriterium, der Abschätzung $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{n^3}$ und der Konvergenz der Summe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

(h) Konvergiert: Wir schätzen ab: $0 \leq \log(1 + \frac{1}{n^2}) \leq \frac{1}{n^2}$ mit Aufgabe **??**(c). Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert auch die ursprüngliche Reihe.

(2) (a) Die Reihe konvergiert: Wir können abschätzen:

$$\frac{n}{n^4 + n^2 + 1} \leq \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}$$

und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergiert. Das Majorantenkriterium zeigt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1}$ auch konvergiert.

Der Grenzwert: Wir wollen die Partialsummen berechnen. Beachte, dass der Nenner faktorisiert werden kann als

$$n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 + 1 - n)(n^2 + 1 + n).$$

Ausserdem ist

$$\frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{n}{(n^2 + 1 - n)(n^2 + 1 + n)} = \frac{1/2}{(n^2 + 1 - n)} - \frac{1/2}{(n^2 + 1 + n)}.$$

Wenn wir $a_n = \frac{1/2}{(n^2+1-n)}$ setzen, ist

$$\frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = a_n - a_{n+1}$$

Darum ist die Partialsumme

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \sum_{n=0}^{N} (a_n - a_{n+1}) = a_0 - a_{N+1} = \frac{1}{2} - \frac{1/2}{(N^2 + 1 + N)}.$$

Im Grenzwert $N \to \infty$ bekommen wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{1}{2}.$$

(b) Die Reihe konvergiert: Sei $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ der goldene Schnitt. Beachte, dass ϕ als Nullstelle geschrieben werden kann: $\phi^2 - \phi - 1 = 0$. Wir zeigen induktiv, dass $F_n \leq \phi^n$ ist. Direkt ist $F_0 = 0 \leq 1 = \phi^0, F_1 = 1 \leq \phi$. Weiter folgt induktiv

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \leq \phi^{n-1} + \phi^{n-2} = \phi^{n-2}(\phi + 1) = \phi^{n-2}\phi^2 = \phi^n$$

Da $\sum_{n=0}(x\phi)^n$ eine geometrische Reihe mit $|x\phi| < 1$ ist, konvergiert sie ($\phi \approx 1.618$). Mit dem Majorantenkriterium konvergiert auch die ursprüngliche Reihe.

Um den Wert der Reihe zu berechnen, setzen wir $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n F_n$.
Wir berechnen

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n F_n = x + \sum_{n=2}^{\infty} x^n F_n = x + \sum_{n=2}^{\infty} x^n (F_{n-1} + F_{n-2}) \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} x^n F_{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} x^n F_{n-2} \\
&= x + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} F_n + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} F_n \\
&= x + xS + x^2 S
\end{aligned}$$

Lösen wir nach S auf folgt $S = \frac{x}{1-x-x^2}$. Diese heisst erzeugenden Funktion der Fibonacci Folge.

□

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Lässt man in der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ für alle n das Glied $\frac{1}{n}$ weg, wenn n eine 9 in ihrer Dezimaldarstellung hat, so erhält man eine konvergente Reihe.

Lösung. Sei

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ die Ziffer 9 kommt nicht in der Dezimaldarstellung von } n \text{ vor}\}.$$

Sei $A_m = A \cap [10^{m-1}, 10^m)$ für $m \in \mathbb{N}$, also die Menge der Zahlen in A, welche in der Dezimaldarstellung aus m Ziffern bestehen. Zum Beispiel $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Beachte, dass $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m = A$, die Mengen (A_m) also die Menge A zerlegen.
Die Menge A_1 besteht aus 8 Elementen. Die Menge A_2 aus weniger als $8 \cdot 9$ Elementen (8 Möglichkeiten für die erste Ziffer, 9 Möglichkeiten für die zweite Ziffer, die 0 kann zusätzlich verwendet werden). Die Menge A_3 aus $8 \cdot 9 \cdot 9$ Elementen, die Menge A_m aus $8 \cdot 9^{m-1}$ Elementen. Weil die Elemente in A_m alle grösser oder gleich 10^{m-1} sind, gilt

$$\sum_{n \in A_m} \frac{1}{n} \leq \sum_{n \in A_m} \frac{1}{10^{m-1}} = 10^{m-1} \cdot 8 \cdot 9^{m-1} = 8 \left(\frac{9}{10}\right)^{m-1}.$$

Also wird die Reihe $\sum_{n \in A} \frac{1}{n}$ von der Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} 8 \left(\frac{9}{10}\right)^{m-1}$ dominiert. Doch dies ist eine geometrische Reihe mit Grenzwert $\frac{8}{1-\frac{9}{10}} = 80$. Also $\sum_{n \in A} \frac{1}{n} \leq 80$. Der exakte Wert ist nicht bekannt, siehe `https://en.wikipedia.org/wiki/Kempner_series`. □

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass das Cauchy-Produkt der bedingt konvergenten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

mit sich selbst divergiert.

Lösung. Wir berechnen die Partialsummen des Cauchy-Produkts $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von der obige Reihe mit sich selbst. Es gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}.$$

Für $a, b > 0$ in $\mathbb{R}$ gilt, dass $\sqrt{a}\sqrt{b} \leq \frac{1}{2}(a+b)$ (binomische Formel). Mit dieser Abschätzung erhalten wir

$$\begin{aligned} |s_n| &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\frac{1}{2}(k+1+n-k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2}{n+2} n = \frac{2}{1+2/n}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\lim_{n\to\infty} |s_n| = 2$ und damit ist die Folge $(|s_n|)_n$ keine Nullfolge, also divergiert das Cauchy-Produkt. $\square$

Aufgabe 4. (1) Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergiert.}$$

(2) Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen mit $0 \leq a_n$ und a_n monoton fallend, und so dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert. Zeige, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$$

gilt.

(3) Sei $s > 1$ eine reelle Zahl. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konvergiert.

Lösung.

(1) Betrachte die Folge $b_n := a_{2^{k+1}}$ für $n \in [2^k, 2^{k+1}-1]$. Setze ausserdem $b_0 := a_0$. Weil a_n monoton fallend ist, haben wir $b_n \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ausserdem sind alle Glieder der Folgen nichtnegativ. Aus der Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ erhalten wir mittels Korollar 7.12 im Skript (Vergleichssatz) die Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^{k+1}} = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k+1} a_{2^{k+1}} = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

.

Betrachte nun die Folge $b'_n := a_{2^k}$ für $n \in [2^k, 2^{k+1} - 1]$. Setze ausserdem $b'_0 := a_0$. Weil a_n monoton fallend ist, haben wir $b'_n \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ausserdem sind alle Glieder der Folgen nichtnegativ. Aus der Konvergenz von

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = -a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} b_n$$

erhalten wir mittels Korollar 7.12 im Skript (Vergleichssatz) die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(2) Aus der Aufgabe 4.(1) wissen wir, dass $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert. Darum muss $2^n a_{2^n}$ eine Nullfolge sein, also $(2^n a_{2^n}) \to 0$. Die Folge $2^{n+1} a_{2^n} = 2\big(2^n a_{2^n}\big)$ strebt auch gegen Null. Für $k \in [2^n, 2^{n+1}]$ können wir abschätzen

$$0 \leq k a_k \leq 2^{n+1} a_{2n},$$

da (a_k) eine in k monoton fallende Folge ist. Weil $(2^{n+1} a_{2^n})_n$ eine Nullfolge ist, impliziert das Sandwich Lemma, dass $(n a_n)_n$ auch eine Nullfolge sein muss.

(3) Die Folge $(a_n)_n$ definiert durch $a_n = \frac{1}{n^s}$ ist monoton fallend. Mit Aufgabe 4.(1) gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ konvergiert} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{ns}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(s-1)n}} \text{ konvergiert.}$$

Somit erhalten wir die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-s})^n$. Diese konvergiert für $s > 1$.

$\square$

Aufgabe 5. Diskutieren Sie, welche der in der Vorlesung behandelten Konvergenzkriterien (Quotientenkriterium, Wurzelkriterium, Leibniz-Kriterium, Majorantenkriterium) für den Beweis der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 + (-1)^n}{n^2 + 1}$$

verwendet werden können.

Lösung. Sei $a_n := (-1)^{n+1} \frac{1+(-1)^n}{n^2+1}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{2n+1} = 0$ und $a_{2n} = \frac{-2}{4n^2+1}$

(1) <u>Quotientenkriterium:</u> Das Quotientenkriterium kann nicht verwentet werden, da $a_n = 0$ für gerade $n \in \mathbb{N}$,

(2) <u>Wurzelkriterium:</u> Wegen der obige Bemerkung gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{-2}{n^2+1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{n^2+1}} = 1$$

Das Wurzelkriterium kann daher nicht verwendet werden.

(3) <u>Leibniz-Kriterium:</u> Sei $b_n := \frac{1+(-1)^n}{n^2+1}$. Die Folge $(b_n)_n$ ist nicht monoton fallend und damit kann das Leibniz-Kriterium nicht verwendet werden.

(4) <u>Majorentenkriterium:</u> Es gilt

$$a_n \leq \frac{1}{n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert (siehe Aufgabe 4), dann konvergiert auch unsere Reihe.

$\square$

Aufgabe 6. Entscheiden Sie für die Funktionenfolgen $f_n, g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) := \frac{1}{1+nx}, \quad g_n(x) := \frac{x}{1+nx}$$

ob diese punktweise bzw. gleichmässig konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion.

Lösung. Wir betrachten zuerst die Folge $(f_n)_n$. Für diese gilt

$$f_n(0) = 1 \longrightarrow 1 \quad \text{und} \quad f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \longrightarrow 0$$

für $x \in (0,1]$ und $n \longrightarrow \infty$. Punktweise konvergiert $(f_n)_n$ also gegen die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_0$. Da alle f_n stetig sind, die Grenzfunktion aber nicht, kann keine gleichmässige Konvergenz vorliegen (denn bei gleichmässiger Konvergenz überträgt sich Stetigkeit auf die Grenzfunktion, vgl. Satz 7.48 im Skript).
Für die Funktionenfolge $(g_n)_n$ gilt

$$g_n(0) = 0 \longrightarrow 0 \quad \text{und} \quad g_n(x) = \frac{x}{1+nx} \longrightarrow 0$$

für $x \in (0,1]$ und $n \longrightarrow \infty$. Punktweise konvergiert $(g_n)_n$ also gegen die konstante Funktion 0. Die Ungleichung

$$|g_n(x) - 0| = \frac{x}{1+nx} \leq \frac{1}{n}$$

impliziert, dass diese Konvergenz gleichmässig ist. $\square$

Aufgabe 7. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge monotoner Funktionen, die punktweise gegen eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert.

(1) Zeigen Sie, dass $(f_n)_n$ gleichmässig gegen f konvergiert.
(2) Belegen Sie durch Gegenbeispiele, dass in a) weder auf die Monotonie der f_n noch auf die Stetigkeit der Grenzfunktion f verzichtet werden kann.

Lösung.

(1) Als stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ist f sogar gleichmässig stetig. Zu gegebenem $\epsilon > 0$ finden wir also eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = a = x_0 < \cdots < x_m = b$ von $[a,b]$, so dass für $x, x' \in [x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leq i \leq m)$ stets

(1) $$|f(x) - f(x')| < \epsilon/2$$

gilt. Aufgrund der punktweisen Konvergenz $f_n \longrightarrow f$ gibt es ausserdem für jedes $0 \leq i \leq m$ ein $N_i \in \mathbb{N}$ mit

(2) $$|f_n(x_i) - f(x_i)| < \epsilon/2$$

für alle $n \geq N_i$. Wir setzen $N := \max(N_0, \ldots, N_m)$ und behaupten, dass für $n \geq N$ und jedes $x \in [a,b]$

(3) $$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

gilt. Damit wäre die gleichmässige Konvergenz $f_n \longrightarrow f$ nachgewiesen. Für den Beweis der Behauptung seien $n \geq N$ und $x \in [a, b]$ beliebig und wähle $1 \leq i \leq m$ mit $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Aus der Monotonie von f_n, (2) und (1) erhalten wir dann

$$f_n(x) \leq \max(f_n(x_{i-1}), f_n(x_i)) < \max(f(x_{i-1}), f(x_i)) + \epsilon/2 < f(x) + \epsilon$$

sowie

$$f_n(x) \geq \min(f_n(x_{i-1}), f_n(x_i)) > \min(f(x_{i-1}), f(x_i)) - \epsilon/2 > f(x) - \epsilon,$$

also zusammen genau (3).

(2) Beispiel 7.43 im Skript ist ein Gegenbeispiel für a), wenn auf die Bedingung “f_n monoton“verzichtet wird. In der Tat, die dort definierten Funktionen f_n konvergieren punktweise gegen die konstante Funktion 0, welche stetig ist. Es kann aber keine gleichmässige Konvergenz vorliegen, da auch argumentiert wird, dass der Schluss von Satz 6.49 nicht gilt (siehe Bespiel 7.43).

Ein Gegenbeispiel mit unstetiger Grenzfunktion ist Beispiel 7.42 im Skript. Alle f_n sind dort monoton und die Folge $(f_n)_n$ konvergiert punktweise gegen die unstetige Grenzfunktion $\mathbb{1}_1$. Da alle f_n stetig sind, impliziert dies direkt, dass keine gleichmässige Konvergenz vorliegen kann, da nach Satz 7.48 die Grenzfunktion sonst selbst stetig sein müsste.

□

Aufgabe 8. Multiple choice Aufgabe.

(1) Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen, die gleichmässig gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?
   (a) Falls g stetig ist, so konvergiert $g \circ f_n$ gleichmässig gegen $g \circ f$.
   (b) <u>Falls g gleichmässig stetig ist, so konvergiert $g \circ f_n$ gleichmässig gegen $g \circ f$.</u>
   (c) Falls g stetig ist, so konvergiert $g \cdot f_n$ gleichmässig gegen $g \cdot f$.
   (d) Falls g gleichmässig stetig ist, so konvergiert $g \cdot f_n$ gleichmässig gegen $g \cdot f$.

(2) Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen und definiere

$$r_n := \sum_{k=n^2}^{n^2+2n} a_k$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen korrekt?
   (a) Ist die Folge $(r_n)_n$ konvergent, so ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}$ konvergent.
   (b) <u>Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist auch die Folge $(r_n)_n$ konvergent.</u>
   (c) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ konvergent, so ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.
   (d) Keins der Obigen.

(3) Welche Reihe konvergiert?
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$,
   (b) <u>$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i)^n$</u>,
   (c) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \cdots$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}}$

(4) Sei I eine abzählbar unendliche Indexmenge und $(a_i)_{i\in I}$ eine Familie positiver reeller Zahlen. Wir wollen

$$\sum_{i\in I} a_i := \sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)},$$

definieren, wobei $\psi\colon \mathbb{N} \longrightarrow I$ eine beliebige Bijektion ist. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

(a) Diese Definition ist nicht sinnvoll, da keine Bijektion $\mathbb{N} \longrightarrow I$ existiert.

(b) Diese Definition ist nicht sinnvoll, da der Wert einer Reihe auf die Summationsreihenfolge ankommt. Der Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ hängt also von der Wahl von ψ ab.

(c) Diese Definition ist nur dann sinnvoll, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ konvergent ist. Denn dann ist diese Reihe wegen $a_i \geq 0$ auch absolut konvergent und die Summationsreihenfolge spielt keine Rolle, sodass der Wert von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ unabhängig von der Wahl von ψ ist.

(d) Diese Definition ist stets sinnvoll, da auch im Fall $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)} = \infty$ die Summationsreihenfolge keine Rolle spielt.

Aufgrund von Proposition 6.11 ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ entweder konvergent (mit Wert in $\mathbb{R}_{\geq 0}$) oder es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)} = \infty$. Im Fall der Konvergenz spielt die Summationsreihenfolge keine Rolle, wie in (b) richtig argumentiert wird (vgl. Satz 6.35 im Skript). Aber dasselbe gilt im Fall $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)} = \infty$: Gäbe es nämlich eine andere Bijektion $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow I$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} < \infty$, so wäre letztere Reihe absolut konvergent, und damit auch jede ihrer Umordnungen. Aber $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ ist eine solche Umordnung, also müsste auch diese Reihe absolut konvergent sein, ein Widerspruch. Wir haben also argumentiert, dass der Wert von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ in jedem Fall unabhängig von der Wahl von ψ ist. Die obige Definition ergibt also in jedem Fall Sinn.

(5) Was ist der Wert der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \ ?$$

(a) $\frac{-1}{3}$,

(b) $\frac{2}{3}$,

(c) $\frac{1}{6}$,

(d) $\frac{1}{2}$