Lösungen zur Übungsserie 11

Aufgabe 1. Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^3}} z^n$,

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n2^n}}{(n+1)^7} z^n$,

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^{n^2}$.

Lösung.

(1) Wir benutzen das Quotientenkriterium:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n=1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+n^3}}}{\frac{1}{\sqrt{1+(n+1)^3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+(n+1)^3}}{\sqrt{1+n^3}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1+(n+1)^3}{1+n^3}}$$
$$= \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3} + \left(\frac{n+1}{n}\right)^3}{\frac{1}{n^3}+1}} = 1$$

wegen Stetigkeit der Wurzelfunktion.

(2) Wir benutzen das Quotientenkriterium:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n=1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n2^n}}{(n+1)^7}}{\frac{\sqrt{(n+1)2^{n+1}}}{(n+2)^7}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n2^n}}{\sqrt{(n+1)2^{n+1}}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^7}{(n+2)^7}$$
$$= \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}}} \cdot 1 = \sqrt{1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(3) Wir transformieren unsere Reihe in einer Reihe der Form $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$. Wir setzen

$$a_k := \begin{cases} k^k, \text{ falls } k = n^2 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}, \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$. Wir benutzen das Wurzelkriterium auf $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$:

$$R = \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{a_k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n^2]{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

da $\sqrt[n^2]{n^n} = (n^n)^{\frac{1}{n^2}} = n^{\frac{n}{n^2}} = n^{\frac{1}{n}}$.

$\square$

Aufgabe 2. Sei $\sum_{=1}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty)$. Sei des Weiteren $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| R^n < \infty$.

(1) Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Funktion

$$z \in \overline{B_R(0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\} \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

wohldefiniert und stetig ist.

(2) Geben Sie ein Beispiel einer solchen Potenzreihe.

Lösung.

(1) Wir bezeichnen die Funktion aus der Aufgabenstellung mit f. Für die Wohldefiniertheit von f ist dann zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für jedes $z \in \overline{B_R(0)}$ konvergiert. Dass dies der Fall ist, beweist die Abschätzung

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, |z|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, R^n < \infty.$$

(In der Tat, sie zeigt sogar absolute Konvergenz.) Um die Stetigkeit von f auf $\overline{B_R(0)}$ nachzuweisen reicht es aufgrund von Satz 7.48 zu zeigen, dass die (stetigen) Partialsummen $f_N(z) := \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ auf $\overline{B_R(0)}$ gleichmässig gegen f konvergieren. Dies folgt jedoch unter Verwendung der Dreiecksungleichung für Reihen (vgl. Proposition 7.28) direkt aus

$$|f(z) - f_N(z)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \, |z|^n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \, R^n$$

für $z \in \overline{B_R(0)}$ und der Tatsache, dass die Reihenreste $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \, R^n$ der konvergenten Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, R^n$ für $N \longrightarrow \infty$ gegen 0 konvergieren.

(2) zB: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$.

$\square$

Aufgabe 3. Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1})^n}{n^2} z^n$$

und zeigen Sie Konvergenz der Potenzreihe bei den Punkten $-R, R \in \mathbb{R}$.

Lösung. <u>Der Konvergenzradius:</u> Wir benutzen das Wurzelkriterium. Sei $\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Somit gilt

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}}{n^{2/n}}.$$

Wir können die Grenzwerte des Nenners und des Zählers separat berechnen (falls sie konvergieren). Konkret ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2/n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^{1/n}}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}}\right)^2,$$

wobei wir die Stetigkeit von $x \longmapsto x^2$ verwendet haben. Ausserdem gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = \lim_{x\to 0} x^x = 1,$$

wenn wir $x \to 0$ betrachten. (Die Aussage $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$ stimmt für jede Folge $x = (x_n) \to 0$, also auch für $x_n = \frac{1}{n}$.)
Im Nenner $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}$ wollen wir die Differenz von Wurzeln in eine Addition verwandeln. Dazu benutzen wir den Trick: $(a-b) = \frac{a^2-b^2}{a+b}$ und erhalten

$$\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}}.$$

Der Term $\frac{-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$ verschwindet für $n \to \infty$. Der andere Term kann wie folgt umgeformt werden:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}.$$

Durch Stetigkeit der vorkommenden Funktionen finden wir, dass die Terme $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n^2}$ verschwinden, erhalten also

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

Daraus erhalten wir

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}}{n^{2/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2/n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Der Konvergenzradius ist somit $R = \frac{1}{\rho} = 2$.

<u>Konvergenz auf dem Rand:</u> Wir überprüfen der Konvergenz der Potenzreihe bei $R = 2$ und $-R = -2$.

Wie oben gilt

$$\frac{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1})^n}{n^2} = \frac{(n-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1})^n}.$$

Mit der Abschätzung $\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1} \geq 2n$ und $\frac{(n-1)}{n} \leq 1$ folgt

$$\frac{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1})^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}\left(\frac{n-1}{2n}\right)^n \leq \frac{1}{2^n n^2}.$$

Somit gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1})^n}{n^2} 2^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Also ist die Potenzreihe absolut konvergent für $R = \pm 2$ ist. □

Aufgabe 4. Zeigen Sie: $\sin(\frac{2\pi}{5}) = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

Lösung. Setze $z = e^{i\theta}$, wobei $\theta = \frac{2\pi}{5}$. Die komplexe Zahl z ist eine Nullstelle des Polynoms

$$T^5 - 1 = (T-1)(T^4 + T^3 + T^2 + T + 1).$$

Weil $z \neq 1$, gilt

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Da $z\bar{z} = |z|^2 = 1$ ist, gilt für das Inverse $z^{-1} = \bar{z}$ und darum $z^2 + z + 1 + \bar{z} + \bar{z}^2 = 0$. Betrachten wir nun

$$\omega = z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z) = 2\mathrm{Re}(e^{i\theta}) = 2\cos\frac{2\pi}{5}.$$

Aus $z^2 + z + 1 + \bar{z} + \bar{z}^2 = 0$ und $z\bar{z} = \bar{z}z = 1$ folgt, dass

$$\omega^2 + \omega - 1 = 0.$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung ist $\omega = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$. Weil $\frac{2\pi}{5}$ im ersten Quadrant liegt, ist $\omega \geq 0$. Somit ist $\omega = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$. Es folgt

$$\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) = \frac{\omega}{2} = \cos\frac{2\pi}{5} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{2\pi}{5}}.$$

Durch Umformen erhalten wir $\sin(\frac{2\pi}{5}) = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

□

Aufgabe 5. Seien $a < b$ reelle Zahlen. Beweisen Sie, dass

$$\int_a^b \sin(t)dt = \cos(a) - \cos(b) \qquad \text{und} \qquad \int_a^b \cos(t)dt = \sin(b) - \sin(a)$$

gilt.

Lösung. Die Potenzreihe des Sinus ist

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}.$$

Setzen $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ und $a_{2n} = 0$ für alle $n \geq 0$. Somit ist

$$\sin(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Wir setzen $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{2n+2} t^{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} t^{2n+2} = -\cos(t) + 1$. Somit ist

$$\int_a^b \sin(t)dt = F(b) - F(a) = -\cos(b) + \cos(a).$$

Analog finden wir $\int_a^b \cos(t)dt = \sin(b) - \sin(a)$. □

Aufgabe 6. Sei $B := B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$, und für $n \geq 0$, sei $f_n : B \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$. Sei $f : B \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = (1-z)^{-1}$. Erklären Sie detailliert was die folgenden Aussagen bedeuten, und beweisen Sie:

(1) Die Folge von Funktionen $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert punktweise gegen f.

(2) Die Folge von Funktionen $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert nicht gleichmässig gegen f.
(3) Sei $r < 1$ eine reelle Zahl, und $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$. Die Folge von Funktionen $(f_n|_D)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gleichmässig gegen $f|_D$.

Lösung.

(1) Für punktweise Konvergenz wird ein fixes $z \in B$ betrachtet. Wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z} \lim_{n\to\infty} 1 - z^{n+1} = \frac{1}{1-z} = f(z)$$

da $|z| < 1$.

(2) Dass $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ gleichmässig gegen f strebt, bedeutet, dass es für alle $\epsilon > 0$ ein $N > 0$ mit $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ für $n \geq N$ und ALLE $z \in B$ GLEICHZEITIG. Die Zahl N hängt nicht von $z \in B$ ab.

Wir analysieren die Differenz

$$|f_n(z) - f(z)| = \left| \sum_{k=0}^{n} z^k - \frac{1}{1-z} \right| = \left| \tfrac{1-z^{n+1}}{1-z} - \tfrac{1}{1-z} \right| = \left| \tfrac{z^{n+1}}{1-z} \right|.$$

Sei nun $\epsilon > 0$. Betrachte für jedes $n \in \mathbb{N}$ die (reelle) Zahl $z_n \in B$ gegeben durch $z_n = 1 - \frac{\epsilon}{n}$. Mit der obigen Herleitung haben wir

$$|f_n(z_n) - f(z_n)| = \left(1 - \frac{\epsilon}{n}\right)^{n+1} \frac{n}{\epsilon}.$$

Doch durch die Bernoulli Ungleichung haben wir

$$\left(1 - \frac{\epsilon}{n}\right)^{n+1} \frac{n}{\epsilon} \geq \left(1 - \frac{\epsilon}{n}(n+1)\right) \frac{n}{\epsilon} = \frac{n}{\epsilon} - (n+1).$$

Zum Beispiel für $\epsilon = \frac{1}{2}$ erhalten wir nun aber die Ungleichung

$$|f_n(z_n) - f(z_n)| \geq 2n - n - 1 = n - 1,$$

welches für alle $n \geq 2$ grösser als $\epsilon = \frac{1}{2}$ ist. Wir erkennen, dass wir für $\epsilon = \frac{1}{2}$ kein $N > 0$ unabhänig von $z \in B$ wählen können, so dass $|f_n(z_n) - f(z_n)| \geq 2n - n - 1 \leq \epsilon$ ist. Also strebt f_n nicht gleichmässig gegen f.

(3) Wie in (2) betrachten wir für beliebige $z \in B$ die Differenz

$$|f_n(z) - f(z)| = \left| \tfrac{z^{n+1}}{1-z} \right|.$$

Da wir aber nun nur $z \in \mathbb{C}$ betrachten, so dass $|z| < r$ für ein fixes $r < 1$ erhalten wir

$$|f_n(z) - f(z)| = \left| \tfrac{z^{n+1}}{1-z} \right| < \frac{r^{n+1}}{1+r}.$$

Weil $r < 1$ ist $\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$. Für beliebiges $\epsilon > 0$ können wir also $N \in \mathbb{N}$ wählen, so dass $r^{n+1} \leq (r+1)\epsilon$. Dann gilt für alle $n \geq N$ die Ungleichung

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{r^{n+1}}{1+r} \leq \epsilon$$

unabhängig von $z \in D = B(0, r)$. Wir schliessen, dass $(f_n|_D)_{n=0}^{\infty}$ gleichmässig gegen $f|_D$ konvergiert.

$\square$

Aufgabe 7. Wir schreiben $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(1) Sei c eine komplexe Zahl. Bestimmen Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid \exp(z) = c\}$.

(2) Angenommen $c \neq 0$. Zeigen Sie, dass es genau eine komplexe Zahl z gibt, mit

$$-\pi < \mathrm{Im}(z) \leq \pi \qquad \text{und} \qquad \exp(z) = c.$$

Die Funktion $\mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}$ die $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ die in (2) charakterisierte eindeutige Zahl z zuordnet, heisst **Hauptzweig** des komplexen Logarithmus.

(3) Zeigen Sie, dass der Hauptzweig des komplexen Logarithmus nicht stetig ist, und bestimmen sie die Unstetigkeitsstellen.

(4) Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $L : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}$ gibt, mit $\exp(L(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}^\times$.

Lösung.

(1) Falls $c = 0$ ist, dann finden wir kein $z \in \mathbb{C}$ mit $\exp(z) = 0$, weil in Satz 7.68 gezeigt wurde, dass $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$ ist. Das reelle Exponential hat aber 0 nicht im Bild und darum ist $|\exp(z)| = 0$ und somit auch $\exp(z) = 0$ nicht möglich.

Falls $c = 1$ ist, folgt wieder aus

$$1 = |\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z)),$$

dass $\mathrm{Re}(z) = 0$ ist. Wir wollen also die Gleichung $1 = \exp(i\theta)$ mit $\theta \in \mathbb{R}$ lösen. Aus der Eindeutigkeit der Polarkoordinatendarstellung (Proposition 7.85) gibt es ein eindeutiges $\theta_0 \in [0, 2\pi)$, welches $1 = \exp(i\theta)$ erfüllt. Da $\exp(i0) = 1$ ist, ist 0 dieses eindeutige θ_0. Weil ausserdem $x \longmapsto \exp(ix)$ 2π-periodisch ist, sind die einzigen Lösungen $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Sei nun $c \in \mathbb{C}^\times$ beliebig. Falls $z, z' \in \mathbb{C}$ beides komplexe Zahlen sind, so dass $\exp(z) = \exp(z') = c$, dann ist $\exp(z - z') = 1$. Mit dem vorherigen Argument muss $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$ sein. Wieder durch die Proposition über Polarkoordinatendarstellung gibt es ein eindeutiges $r > 0, \theta_0 \in [0, 2\pi)$, so dass $c = r\exp(i\theta_0) = \exp(\log(r) + i\theta_0)$, wobei $\log : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Die Zahl $z_0 = \log(r) + i\theta_0$ gibt uns also eine Lösung der Gleichung $\exp(z) = c$. Alle anderen Lösungen sind von der Form $z_0 + 2\pi ik$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

(2) Aus (1) folgern wir, dass für $c \neq 0$ die Lösung von $\exp(z) = c$ eindeutig ist, falls wir fordern, dass $a \leq \mathrm{Im}(z) < a + 2\pi$ für ein fixes $a \in \mathbb{R}$ ist. Die Aussage in (2) folgt für $a = -\frac{\pi}{2}$.

(3) Der Hauptzweig ist unstetig auf $\mathbb{R}_{<0}$, da der Wert des Haupzweiges bei $-a \in \mathbb{R}_{<0}$ gleich $\log a + i\pi$ ist. Wenn wir aber $-a$ durch $-a - \frac{1}{n}$ approximieren, bekommen wir als Grenzwert $\log a - i\pi$.

(4) Auf dem Einheitskreis $|z| = 1$, haben wir in (1) gezeigt, dass L die Form $L(\exp(i\theta)) = \theta + 2\pi ik_\theta$ haben muss, wobei k_θ eine ganze Zahl für jedes $\theta \in [0, 2\pi)$ bezeichnet. Doch falls L stetig wäre, müsste k_θ stetig von θ abhängen. Die Zahl k_θ muss dann aber die gleiche ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ für alle θ sein. *Sie kann an keinem Ort springen.* Doch

dann ist L nicht stetig bei $1 \in \mathbb{C}$, da

$$L(1) = 0 + 2\pi i k \neq 2\pi + 2\pi i k = \lim_{\theta \to 2\pi} \theta + 2\pi i k = \lim_{\theta \to 2\pi} L(\exp(i\theta)).$$

Also kann kein stetiges globales Rechts-Inverses der Exponentialfunktion existieren.

$\square$

Aufgabe 8. Multiple choice Aufgabe.

(1) Sei $(a_n)_n$ eine Folge mit $a_n \in \{2, 3\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n}$$

- (a) ... konvergiert bedingt,
- (b) ... konvergiert absolut,
- (c) ... konvergiert bedingt oder divergiert,
- (d) ... konvergiert. Die Konvergenz kann sowohl bedingt als auch absolut sein, abhängig von der Folge $(a_n)_n$.

(2) Für welche Zahlen $z \in \{1, i+1, 3, 2\}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n + n} z^{2n}$$

- (a) keine,
- (b) $z \in \{1, 3\}$,
- (c) $z \in \{1, 1+i\}$,
- (d) $z \in \{2, 3\}$.

(3) Was ist der Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=1} n! z^n$$

- (a) 0,
- (b) $\frac{1}{2}$,
- (c) 1,
- (d) ∞.

(4) Welche Aussage ist für jede durch eine Reihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit Konvergenzradius R definierte Funktion $f\colon (-R, R) \longrightarrow \mathbb{C}$?

- (a) Falls $\lim_{x \nearrow R} f(x)$ existiert dann konvergiert die Reihe für $x = R$.
- (b) Falls die Reihe für $x = R$ gegen $s \in \mathbb{C}$ konvergiert dann existiert der Grenzwert $\lim_{x \nearrow R} f(x)$ aber er stimmt nicht immer mit s überein.
- (c) Falls die Reihe für $x = R$ konvergiert dann definiert sie eine stetige Funktion $f\colon (-R, R] \longrightarrow \mathbb{C}$.
- (d) Falls die Reihe für $x = R$ konvergiert dann konvergiert sie für $x = R$ absolut.