Lösungen zur Übungsserie 12

Aufgabe 1. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim_{x\searrow 0} \frac{\sin(x)-x}{x^2\sin(x)}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{\cos x - 1}$ (c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-4^x}{\sin \pi x}$

(d)* $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{e^x+x}$ (e) $\lim_{x\searrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ (f) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\sqrt{\ln x}}\left(\sqrt{\ln x}\right)^x}{\sqrt{x}^{\ln x}(\ln x)^{\sqrt{x}}}$

Lösung.

(a) Situation $\frac{0}{0}$. Wir berechnen mit l'Hôpital's Regel

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{\sin(x)-x}{x^2\sin(x)} = \lim_{x\searrow 0} \frac{\cos(x)-1}{2x\sin(x)+x^2\cos(x)}.$$

Immer noch Situation $\frac{0}{0}$. Wieder mit l'Hôpital's Regel ist das derselbe Grenzwert wie

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{-\sin(x)}{2x\cos(x)+2\sin(x)+2x\cos(x)-x^2\sin(x)}.$$

Immer noch Situation $\frac{0}{0}$. Wieder mit l'Hôpital's Regel ist das derselbe Grenzwert wie

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{-\cos(x)}{2\cos(x)-2\sin(x)+2\cos(x)+2\cos(x)-2x\sin(x)-2x\sin(x)-x^2\cos(x)}.$$

Dieser Grenzwert ist gleich $\frac{-1}{2+2+2} = -\frac{1}{6}$

(b) Situation $\frac{0}{0}$. Wir berechnen mit l'Hôpital's Regel

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{-\sin x - 1}.$$

Immer noch Situation $\frac{0}{0}$. Wieder mit l'Hôpital's Regel ist das derselbe Grenzwert wie

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{-\cos x}.$$

Dieser Grenzwert ist gleich -1

(c) Situation $\frac{0}{0}$. Beachte, dass $4^x = \exp(x\log(4))$ ist und darum

$$(4^x)' = (\exp(x\log(4)))' = \log(4)\exp(x\log(4)) = \log(4)4^x.$$

Wir berechnen mit l'Hôpital's Regel

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4-4^x}{\sin \pi x} = \lim_{x\to 2} \frac{4x^3-\log(4)4^x}{\pi\cos\pi x} = \frac{16(2-\log(4))}{\pi}$$

(d) Wir berechnen

$$\ln\left(\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{e^x+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\sqrt[x]{e^x+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x+x)}{x}$$

Situation $\frac{\infty}{\infty}$. Wir berechnen mit l'Hôpital's Regel

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x+x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+1}{e^x+x}$$

Situation $\frac{\infty}{\infty}$. Wir berechnen mit l'Hôpital's Regel

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+1}{e^x+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}=1$$

Somit ist

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{e^x+x}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left(\sqrt[x]{e^x+x}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\ln\left(\sqrt[x]{e^x+x}\right)}=e$$

(e) Wir schreiben zuerst um

$$\lim_{x\searrow 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\searrow 0}\exp\left(\frac{1}{x^2}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)=\exp\left(\lim_{x\searrow 0}\frac{1}{x^2}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right),$$

weil exp stetig ist. Wir haben die Situation $\frac{0}{0}$. Wir berechnen mit l'Hôpital's Regel

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{1}{x^2}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\searrow 0}\frac{1}{2x}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\searrow 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2\sin(x)x^2}.$$

Dieser Grenzwert ist wie in Teilaufgabe (a) zu lösen und ergibt $-\frac{1}{6}$, also ist der ursprüngliche Grenzwert

$$\lim_{x\searrow 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\exp\left(-\frac{1}{6}\right).$$

$\square$

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$:

(a) $\sqrt{1+x^2}$ (b) $\cos(\cos x)$ (c) $\exp\left(\frac{1}{1+x^4}\right)$

(d) $\frac{e^x-1}{e^x+1}$ (e) $x^{\sin x}$ (definiert nur für $x>0$) (f) $\frac{(x^2\cos x+2)^2}{\log(2+x^2)+x^6}$

Lösung.

(1) $f_1'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(2) $f_2'(x)=-\sin(\cos x)\cdot(-\sin x)=\sin(\cos x)\sin x$

(3) $f_3'(x)=\exp\left(\frac{1}{1+x^4}\right)\frac{-4x^3}{(1+x^4)^2}$

(4) $f_4'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

(5) $f_5'(x)=\left(e^{\sin x\log x}\right)'=e^{\sin x\log x}\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\log x\right)=x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\log x\right).$

(6) $f_6'(x)=\frac{2(x^2\cos x+2)(2x\cos x-x^2\sin x)(\log(2+x^2)+x^6)-(x^2\cos x+2)^2\left(\frac{2x}{2+x^2}+6x^5\right)}{(\log(2+x^2)+x^6)^2}$

$\square$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass Ableitungen die Zwischenwerteigenschaft besitzen: Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und ist $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so nimmt f' jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ an.

Lösung. Sei c ein Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$. Wir betrachten die Funktion $g\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := f(x) - cx$ für $x \in [a, b]$. Dann ist g differenzierbar mit

$$g'(x) = f'(x) - c.$$

Besitzt g' keine Nullstelle, so muss g monoton sein (sogar streng monoton, siehe MC-Aufgabe (2)), also gilt entweder $g' \geq 0$, falls g monoton wachsend ist, oder $g' \leq 0$, falls g monoton fallend ist. Beachten wir zusätzlich, dass g' laut Annahme keine Nullstelle hat, so folgt $g' > 0$ oder $g' < 0$. Äquivalenterweise gilt entweder $f'(x) > c$ für alle $x \in [a, b]$ oder $f'(x) < c$ für alle $x \in [a, b]$. Beide dieser Möglichkeiten widersprechen jedoch der Wahl von c. Dies zeigt, dass g' eine Nullstelle besitzen muss, also dass es ein $\xi \in [a, b]$ gibt mit $f'(\xi) = c$.
$\square$

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, derart, dass $f(x) = f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(1) Zeigen Sie, dass eine reelle Zahl c existiert, mit $f(x) = c \cdot \exp(x)$.
(2) Was passiert, falls f nur Definitionsbereich $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ anstatt $\mathbb{R}$ hat und ebenfalls $f' = f$ erfüllt?

Lösung.

(1) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, derart, dass $f = f'$. Definiere eine Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $g(x) = \frac{f(x)}{\exp(x)}$. Wir berechnen die Ableitung mit der Quotientenregel
$$g'(x) = \frac{f'(x)\exp(x) - f(x)\exp'(x)}{\exp(2x)}.$$
Doch weil $f' = f$ und $\exp' = \exp$ gilt, ist die Ableitung $g' = 0$. Darum ist g konstant, $g(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weil aber $f(x) = g(x)\exp(x)$ ist, folgt $f(x) = c\exp(x)$.
(2) Wir können analog wie in (a) vorgehen. Wir erhalten jedoch für g nur, dass g konstant auf $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ ist. Mit Hilfe der charakteristischen Funktion können wir $g = c_1\mathbb{1}_{(-\infty,0)} + c_2\mathbb{1}_{(0,\infty)}$ schreiben, für zwei reelle Zahlen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. (Erinnerung: $\mathbb{1}_A(x) = 1$ genau dann wenn $x \in A$ und $\mathbb{1}_A(x) = 0$ genau dann wenn $x \notin A$).
Wir erhalten $f(x) = e^x(c_1\mathbb{1}_{(-\infty,0)} + c_2\mathbb{1}_{(0,\infty)})$.

$\square$

Aufgabe 5. Sei $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$. Wenn $M \geq 0$ derart, dass $|f'(x)| \leq M\,|f(x)|$ für alle $x \in [0, 1]$ existiert, dann zeigen Sie $f(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$.

Lösung. Wir wollen anstatt f die nichtnegative Funktion $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $g = f^2$ betrachten. Die Funktion g ist differenzierbar und $g(0) = 0$. Ausserdem erfüllt sie eine ähnliche Eigenschaft wie f:

$$|g'(x)| = 2|f(x)f'(x)| \leq 2|f(x)|M|f(x)| = 2M|g(x)| = 2Mg(x).$$

Betrachte nun $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) = \exp(-2Mx)g(x)$. Die Funktion h ist differenzierbar und hat Ableitung

$$h'(x) = \exp(-2Mx)\left(g'(x) - 2Mg(x)\right).$$

Weil die Exponentialfunktion strikt positiv ist und der zweite Term wegen der gefundenen Abschätzung ≤ 0 ist, erhalten wir $h'(x) \leq 0$, das heisst h ist monoton fallend. Doch weil $h \geq 0$ und $h(0) = 0$ ist, schliessen wir $h(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$. Dies impliziert $g(x) = 0$ und dann auch $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$. $\square$

Aufgabe 6. Finden Sie ein Gegenbeispiel für jede falsche Aussage in Aufgabe 7.(1).

Lösung.

(a) $x \in \mathbb{R} \longrightarrow x^2$

(c) $x \in \mathbb{R} \longrightarrow e^x$.

(d) $x \in \longrightarrow \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$\square$

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgabe.

(1) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?
   - (a) Ist f differenzierbar, so ist f gleichmässig stetig.
   - (b) <u>Ist f differenzierbar, so ist f stetig.</u>
   - (c) Ist f differenzierbar, so ist f Lipschitz-stetig.
   - (d) Ist f differenzierbar, so ist f' stetig.

(2) Betrachte die folgende Aussage: "Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$f'(x) \neq 0$$

für alle $x \in I$. Dann ist f streng monoton.". Diese Aussage...
   - (a) <u>... gilt im Allgemeinen.</u>
   - (b) ... gilt nicht im Allgemeinen. Die Aussage stimmt aber, wenn f stetig differenzierbar ist.
   - (c) ... selbst für stetig differenzierbares f gilt dies nicht im Allgemeinen.
   - (d) ... gilt nie.

(3) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?
   - (a) Ist $x_0 \in I$ ein lokales Extremum von f, so ist $f'(x_0) = 0$.

(b) Ist $x_0 \in I$ kein Endpunkt von I und gilt $f'(x_0) = 0$, so ist x_0 ein lokales Extremum von f.

(c) Seien $a := \inf(I)$ und $b := \sup(I)$. Dann liegen alle lokalen Extrema von f in der Menge $\{a, b\} \cup \{x \in I \,\|\, f_0(x) = 0\}$.

(d) Sei $a := \inf(I) \in I$. Dann ist a ein lokales Extremum von f.

(4) Welche der folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$ ist nicht bei $x_0 = 0$ differenzierbar?

(a) $f(x) = \sqrt{|x|} \sin \sqrt{|x|}$,

(b) $f(x) = |x|^{3/2}$,

(c) $f(x) = x^2 g(x)$ wobei $g(x) = 1$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $g(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(d) keine. Alle Funktionen in (a)-(c) sind bei 0 differenzierbar.

(5) Welche Aussage ist falsch?

(a) $|x|^{3/2} = o(x)$, $(x \longrightarrow 0)$.

(b) Für jede stetige Funktion $f\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ und alle $x_0 \in (a, b)$ gilt: $f(x) - f(x_0) = o(x - x_0)$, $(x \longrightarrow x_0)$.

(c) $\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$, $(x \longrightarrow 0)$.

(d) $\cos(x) = 1 + o(x)$, $(x \longrightarrow 0)$.