Lösungen zur Übungsserie 13

Aufgabe 1. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.

(1) Zeigen Sie, dass jedes lokale Minimum von f ein (globales) Minimum ist.
(2) Zeigen Sie, dass falls f streng konvex ist und ein Minimum bei $x_0 \in I$ annimmt, dann ist $f(x) > f(x_0)$ für alle $x \in I \setminus \{x_0\}$.

Lösung. Erinnerung: eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist konvex, falls

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

für alle $x, y \in I$ und $t \in [0,1]$; f ist streng konvex, falls

$$f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y)$$

für alle $x \neq y \in I$ und $t \in [0,1]$

(1) Sei $x_0 \in I$ sei ein Punkt, an dem unsere Funktion ein lokales Minimum annimmt. Wir nehmen an per Widerspruch, dass x_0 kein globales Minimum ist, i.e. es existiert ein $x_1 \in I$ so dass $f(x_1) < f(x_0)$. Wir definieren die Funktion $x : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ via

$$x(t) := (1-t)x_0 + tx_1$$

Nach konvexität von f und die Annahme es folgt, dass

$$f(x(t)) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1) < (1-t)f(x_0) + tf(x_0) = f(x_0)$$

Dies widerspricht der Annahme, dass f bei x_0 ein lokales Minimum annimt, da für klein t $x(t)$ beliebig nah zu x_0 ist.

(2) Sei $x_0 \in I$ sei ein Punkt, an dem unsere Funktion ein lokales Minimum annimmt. Wir nehmen an per Widerspruch, dass ein weiteres lokales Minimum $x_1 \neq x_0$ existiert. Wegen (1) sind beide x_0 und x_1 globale Minima. Insbesondere haben wir $f(x_0) = f(x_1)$. Betrachte die Funktion $x(t)$ wie in (1) definiert. Wegen streng Konvexität von f haben wir

$$f(x(t)) < (1-t)f(x_0) + tf(x_1) = f(x_0)$$

für alle $t \in [0,1]$, da $f(x_0) = f(x_1)$. Dies widerspricht der Tatsache, dass f bei x_0 ein globales Minimum annimmt.

□

Aufgabe 2. Seien $p, q > 1$ reelle Zahlen, welche $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ erfüllen. Beweisen Sie, dass für alle nichtnegative reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

gilt.

Hinweis: Definieren Sie eine geeignete Funktion und bestimmen Sie ihr Minimum.

Lösung. Beachte zuerst, dass falls x oder y Null ist, die Ungleichung stimmt. Wir nehmen also an, dass $x, y > 0$ sind.

Fixiere $y > 0$ und betrachte die stetig differenzierbare Funktion $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy.$$

Wir wollen zeigen, dass diese Funktion überall grösser oder gleich 0 ist. Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = x^{p-1} - y.$$

Also hat f ein Extrema bei $x_0 = y^{\frac{1}{p-1}}$. Aus $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ finden wir, dass $p = \frac{q}{q-1}$ und darum $\frac{1}{p-1} = q - 1$. Die Extremstelle ist $x_0 = y^{q-1}$.

Die Funktion hat wegen Aufgabe 1 ein globales Minimum, da $f''(x) = (p-1)x^{p-2} > 0$ für alle $x \in (0, \infty)$ ist, und f darum (sogar streng) konvex ist.

Wieder unter der Benutzung von $p = \frac{q}{q-1}$ berechnen wir

$$f(x_0) = \frac{y^{(q-1)p}}{p} + \frac{y^q}{q} - y^q = \frac{(q-1)y^q}{q} + \frac{y^q}{q} - y^q = 0.$$

Weil f bei x_0 ein globales Minimum annimt, folgern wir die Ungleichung

$$0 = f(x_0) \leq f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy,$$

und darum

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

$\square$

Aufgabe 3. Berechnen Sie mit partieller Integration

(1) das unbestimmte Integral $\int x^2 \sin x \, dx$,

(2) rekursive Formeln für folgende unbestimmte Integrale

$$a_n = \int x^n \exp x \, dx, \qquad b_n = \int x^n \sin x \, dx \qquad \text{und} \qquad c_n = \int x^n \cos x \, dx$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_0$,

(3) die unbestimmten Integrale $\int x^a \log x \, dx$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Beachten Sie, dass der Fall $a = -1$ getrennt zu behandeln ist.

(4) die Integrale $\int \exp(ax) \sin(bx) \, dx$ für $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lösung.

(1) Mit partieller Integration (PI) finden wir

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x \, dx &\overset{\text{PI}}{=} x^2 \cdot (-\cos x) - \int (2x) \cdot (-\cos x) \, dx \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx \\ &\overset{\text{PI}}{=} -x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x \, dx) \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C,\end{aligned}$$

wobei wir in den partiellen Integrationen jeweils den ersten Term abgeleitet und den zweiten integriert haben.

(2) Wir haben

$$a_0 = \exp x + C, \qquad b_0 = -\cos x + C \qquad \text{und} \qquad c_0 = \sin x + C.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ berechnen wir rekursive Formeln wie in Teilaufgabe (a):

$$\begin{aligned}a_n &= \int x^n \exp x \, dx \overset{\text{PI}}{=} -x^n \exp x + n \int x^{n-1} \exp x \, dx = x^n \exp x - n a_{n-1}, \\ b_n &= \int x^n \sin x \, dx \overset{\text{PI}}{=} -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \, dx = -x^n \cos x + n c_{n-1}, \\ c_n &= \int x^n \cos x \, dx \overset{\text{PI}}{=} x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x \, dx = x^n \sin x - n b_{n-1}.\end{aligned}$$

(3) Im Spezialfall $a = -1$ erhalten wir

$$\int x^{-1} \log x \, dx \overset{\text{PI}}{=} \log x \log x - \int (\log x) x^{-1} \, dx$$

indem wir $x \longmapsto x$ integrieren und $x \longmapsto \log x$ ableiten. Darum ist $\int x^{-1} \log x \, dx = \frac{\log^2 x}{2} + C$. Anderenfalls erhalten wir

$$\begin{aligned}\int x^a \log x \, dx &\overset{\text{PI}}{=} \frac{x^{a+1}}{a+1} \log x - \int \frac{x^{a+1}}{a+1} \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \log x - \frac{x^{a+1}}{(a+1)^2} \\ &= x^{a+1} \frac{(a+1) \log x - 1)}{(a+1)^2} + C.\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\int \exp(ax) \sin(bx) \, dx &\overset{\text{PI}}{=} \frac{\exp(ax)}{a} \sin(bx) - \int \frac{\exp(ax)}{a} b \cos(bx) \, dx \\ &\overset{\text{PI}}{=} \frac{\exp(ax) \sin(bx)}{a} - \frac{\exp(ax)}{a^2} b \cos(bx) - \int \frac{\exp(ax)}{a^2} b^2 \sin(bx) \, dx\end{aligned}$$

Darum ist

$$\int \exp(ax) \sin(bx) \, dx = \frac{\frac{\exp(ax) \sin(bx)}{a} - \frac{\exp(ax) b \cos(bx)}{a^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\exp(ax)(a \sin(bx) - b \cos(bx))}{a^2 + b^2} + C.$$

□

Aufgabe 4. Seien $a < b$ reell, und seien $f, g : [a, b] \to [0, \infty)$ stetige Funktionen, derart, dass

$$f(x) \leq f(a) + \int_a^x f(t)g(t)dt$$

für alle $x \in [a, b]$ gilt. Zeigen Sie folgende Ungleichung:

$$f(x) \leq f(a) \exp\left(\int_a^x g(t)dt\right) \qquad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Lösung. Definiere

$$h(x) = f(a) + \int_a^x f(t)g(t)dt.$$

Per Annahme ist $h \geq f$.
Beachte, dass

$$(\log h(x))' = \frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{f(x)g(x)}{f(a) + \int_a^x f(t)g(t)dt} = g(x)\frac{f(x)}{f(a) + \int_a^x f(t)g(t)dt}$$

Per Annahme ist

$$\frac{f(x)}{f(a) + \int_a^x f(t)g(t)dt} \leq 1$$

und darum

$$(\log h(t))' \leq g(t).$$

Wir integrieren nun diese Ungleichung von $t = a$ bis $t = x$ und erhalten

$$\log h(x) - \log h(a) \leq \int_a^x g(t)dt.$$

Weil ausserdem $h(a) = f(a)$ bekommen wir, wenn wir auf beiden Seiten die Exponentialfunktion anwenden

$$h(x) \leq f(a) \exp\left(\int_a^x g(t)dt\right).$$

Da aber $f \leq h$ ist, folgt die Grönwall Ungleichung. □

Aufgabe 5. Benutzen Sie die Zwischenwerteigenschaft von Ableitungen (siehe Übungsserie 12, Aufgabe 4) um folgende Probleme zu lösen.

(1) Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \frac{\sqrt[x]{e} + 1}{\sqrt[x]{e}}$$

Zeigen Sie, dass keine **differenzierbare** Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F'(x) = f(x) \text{ für alle } x \neq 0$$

existiert.

(2)* Sei $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für } x \neq 0, \\ 1, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass keine Funktion $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$G' = g$$

existiert.

Lösung. Erinnerung Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und ist $F\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so nimmt F' jeden Wert zwischen $F'(a)$ und $F'(b)$ an.

(1) Bemerke: $f\left(\frac{1}{\ln(\frac{1}{3})}\right) = 4$ und $f\left(\frac{1}{\ln(2))}\right) = \frac{3}{2}$. Wegen Zwischenwerteigenschaft existiert ein $x \in \mathbb{R}$ so dass $f(x) = 2$, aber

$$f(x) := \frac{\sqrt[x]{e} + 1}{\sqrt[x]{e}} = 2 \Rightarrow \sqrt[x]{e} = -2$$

ein Widerspruch.

(2) Es ist einfach zu sehen, dass g die Zwischenwerteigenschaft erfüllt. Wir nehmen per Widerspruch an, dass g eine Stammfunktion besitzt. Wir definieren die folgende Funktion:

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} \cos(\frac{1}{x}), & \text{für alle } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Wir zeigen, dass h eine Stammfunktion besitzt.
Sei

$$J : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & \text{für alle } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Dann ist J differenzierbar mit $J'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$ für $x \neq 0$ und $J'(0) = 0$.
Setze

$$q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x}), & \text{für alle } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Dann ist q stetig, da

$$\lim_{x \to 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

da $\sin(\frac{1}{x}) \in [-1, 1]$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt. Insbesondere besitzt q eine Stammfunktion.
Bemerke: $h(x) = q(x) - J'(x)$, somit besitzt h eine Stammfunktion wegen Linearität von $\int$.
Insbesondere, falls g eine Stammfunktion besitzt, dann besitzt auch $g - h$ eine Stammfunktion, aber

$$(g - h)(x) = \begin{cases} 0, & \text{für alle } x \neq 0, \\ 1, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

und diese Funktion erfüllt nicht die Zwischenwerteigenschaft, ein Widerspruch.

$\square$

Aufgabe 6. Finden Sie ein Gegenbeispiel für jede falsche Aussage in Aufgabe 8.(2).

Lösung.

(a) $I = [-1, 1]$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{für } x \in [-1, 0], \\ 1, & \text{für } x \in (0, 1] \end{cases}$$

f erfüllt nicht die Zwischenwerteigenschaft, so besitzt sie keine Stammfunktion.

(b) Sei $J : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ wie in Lösung von 5.(2) definiert. Dann ist J nicht stetig differenzierbar, da

$$\lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

existiert nicht.

(d) Sei $g : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} |x|^p \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für alle } x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

für ein $p < 2$. Per Deinition besiztz $g' : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion (z.b. g). Wir zeigen, dass g' nicht Riemann-integrierbar ist. Es gilt fr̈ alle $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$:

$$g'(x) = p|x|^{p-1} \operatorname{sgn}(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) - |x|^{p-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Da $p < 1$ folgt $p - 2 \leq 0$ und somit ist g' unbeschränkt und insbesondere ist g' nicht Riemann-integrierbar.

$\square$

Aufgabe 7. Verwenden Sie folgende Ressource, um die Berechnung von Integralen zu üben:

`https://moodle-app2.let.ethz.ch/course/view.php?id=17981`

Aufgabe 8. Multiple choice Aufgaben.

(1) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Welche der folgende Aussage gilt nicht im Allgemeinen?
   (a) Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, so ist f monoton wachsend.
   (b) Ist f monoton wachsend, so gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$.
   (c) Ist f streng monoton wachsend, so gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$.
   (d) Alle Aussage gelten im Allgemeinen.

(2) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgende Aussage gilt im Allgemeinen?
   (a) Ist I kompakt und f Riemann-integrierbar, so besitzt f eine Stammfunktion.

(b) Besitzt f eine Stammfunktion, so ist f stetig.
(c) Ist f differenzierbar, so besitzt f eine Stammfunktion.
(d) Besitzt f eine Stammfunktion und ist I kompakt, so ist f Riemann-integrierbar.

(3) Welche Aussage über eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist falsch im Allgemeinen?
(a) $x \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ist eine Stammfunktion von f.
(b) $x \longmapsto -\int_x^b f(t)dt$ ist eine Stammfunktion von f.
(c) $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ für jede Stammfunktion von f und alle $x \in [a,b]$.
(d) Falls f stetig differenzierbar ist dann $f(x) = \int_a^x f'(t)dt$.

(4) Welche Aussage ist wahr?
(a) $\int_0^2 \sin(x^2)dx = \int_0^{\sqrt{2}} \sin(x)dx$.
(b) $\int_0^2 \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}} x^{-1/2}\sin(x)dx$.
(c) $\int \sin(x^2)dx = \frac{\sin(x^2)}{2x} + C$.
(d) $\int_0^2 \sin(x^2)dx = 2 - \int_0^2 \cos(x^2)dx$.