Übungsserie 14

Keine Abgabe

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen

$$\text{(a) } y' + y = 1, \quad \text{(b) } -2y' + y = e^x, \quad \text{(c) } y' = xy^2, \quad \text{(d) } y' = 1 + y^2$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale:

$$\text{(a) } \int_1^\infty xe^{-x}\,dx, \quad \text{(b) } \int_0^2 \frac{2x}{x^2-4}\,dx, \quad \text{(c) } \int_1^3 (x-1)^{-\frac{2}{3}}\,dx, \quad \text{(d) } \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$$

Aufgabe 3. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall mit $a := \inf(I) \in I$. Sei des Weiteren $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $y\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$y'(x) \leq f(x)y(x)$$

für alle $x \in I$. Beweisen Sie für $x \in I$ die Ungleichung

$$y(x) \leq y(a)\exp\left(\int_a^x f(t)\,dt\right).$$

Lösung. Nach Korollar 9.3 löst die Funktion

$$z\colon I \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \exp\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)$$

die Differentialgleichung $z' = f(x)z$. Da ausserdem $z(x) > 0$ für jedes $x \in I$ gilt, ist der Quotient y/z eine differenzierbare Funktion auf I. Ableiten ergibt für $x \in I$

$$\left(\frac{y}{z}\right)'(x) = \frac{y'(x)z(x) - y(x)z'(x)}{z(x)^2} = \frac{y'(x) - f(x)y(x)}{z(x)} \leq 0$$

unter Verwendung der Voraussetzung an y und $z > 0$. Die Funktion y/z ist also monoton fallend. Wegen $y(a)/z(a) = y(a)$ folgt hieraus die behauptete Ungleichung. $\square$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Werte $a \in \mathbb{R}$ für welche die Reihe

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\log(n)^a}$$

konvergiert.

Lösung. Zuerst bemerken wir, dass die Reihe für $a \leq 0$ nicht konvergiert, da

$$\frac{\log(n)^{|a|}}{n} \geq \log(2)^{|a|}\frac{1}{n}$$

für alle $n \geq 2$, und wir wissen, dass die harmonische Reihe konvergiert nicht.
Sei $a > 0$. Auf $[1, \infty)$ die Funktion $\frac{1}{x\log(x)^a}$ ist monoton fallend: die Ableitung ist

$$-\frac{a\log(x)^{2a-1}}{(x\log(x)^a)^2}$$

und auf $[1, \infty)$ ist log nicht-negativ. Wir benutzen den Integraltest (Satz 9.35). Mit die Substitution $x = e^u$ ist

$$\int \frac{1}{x\log(x)^a}dx = \int \frac{1}{u^a}du$$

somit ist

$$\int \frac{1}{x\log(x)^a} = \begin{cases} \log(\log(x)), & \text{für } a = 1 \\ \frac{1}{1-a}\log(x)^{1-a}, & \text{für } a \neq 1 \end{cases}$$

Dann konvergiert $\int_2^\infty \frac{1}{x\log(x)^a}dx$ genau dann wenn $a > 1$. Nach integraltest konvergiert $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\log(n)^a}$ genau dann wenn $a > 1$. □

Aufgabe 5. Wir zeigen, dass π irrational ist.
Wir nehmen per Widerspruch an, dass $\pi = \frac{a}{b}$ für irgendwelche $a, b \in \mathbb{N}$ gilt. Sei $n \in \mathbb{N}$, und betrachte folgende Polynome

$$f_n(x) := \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$$

und

$$F_n(x) := \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k f^{(2k)}(x)$$

(1) Begründen Sie, wieso f_n, alle Ableitungen von f_n, und F_n bei 0 und bei π ganzzahlige Werte annehmen. Verifizieren Sie des Weiteren, dass $(f_n)|_{[0,\pi]}$ eine nicht-negative Funktion ist, welche genau bei 0 und π verschwindet.
(2) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\ dx = F_n(\pi) + F_n(0)$$

gilt.
(3) Schliessen Sie auf einen Widerspruch.

Lösung.

(1) Der erste Teil ist klar, da $a, b \in \mathbb{N}$. Sei $x \in [0, \pi]$ so dass $f_n(x) = 0$. Dann ist entweder $x = 0$ oder $a - bx = 0$, i.e. $x = \frac{a}{b} = \pi$. Da

$$f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{\pi^n \cdot a^n}{2^n}}{n!} > 0$$

dann gilt $f_n|_{(0,\pi)} > 0$ nach Stetigkeit von f_n.

(2) Bemerke

$$F_n''(x) + F_n(x) = f(x)$$

da $f_n^{(k)}(x) = 0$ für alle $k > 2n$. Insbesondere

$$f(x)\sin(x) = (F'(x)\sin(x) - F\cos(x))'$$

Die Behauptung dann folgt aus Fundamentalsatz der Integralrechnung.

(3) Wir haben

$$\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\ dx \leq \frac{\pi^{n+1}a^n}{n!}$$

da $\sin(x) \geq 0$ auf $[0,\pi]$. Es ist klar, dass für n gross genug $\frac{\pi^{n+1}a^n}{n!} < 1$, somit für solche n gilt $F_n(\pi) + F_n(0) < 1$. Dies ist ein Wiederspruch, da $F_n(\pi) + F_n(0) \in \mathbb{Z}$ (aus (1)) und $F_n(\pi) + F_n(0) > 0$ (aus (2)+(1)) gilt.

□

Aufgabe 6. Entwickeln Sie die Taylorreihen von $f(x) := \frac{1}{x}$ und von $g(x) := \sin(x)$ um $x_0 = 1$.

Lösung.

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$. Wir benutzen folgendes Trick:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$$

(2) $g(x) = \sin(x)$. Wir wissen

$$g^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{für } n = 4k \\ \cos(x), & \text{für } n = 4k+1 \\ -\sin(x), & \text{für } n = 4k+2 \\ -\cos(x), & \text{für } n = 4k+3 \end{cases}$$

Bemerke, dass $\cos(x) = \sin(x+\pi/2)$, $-\sin(x) = \sin(x+\pi)$ und $-\cos(x) = \sin(x+3\pi/2)$. Es folgt

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n \sin\left(1 + \frac{n\pi}{2}\right)$$

□

Aufgabe 7. Gegeben sei ein nichtleeres offenes Intervall $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, reelle zahlen $x, x_0 \in (a,b)$ und eine $(n+1)$-Mal differenzierbare Funktion $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$

(1) Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion

$$F : t \in (a,b) \longmapsto \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

durch

$$t \in (a,b) \longmapsto \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

gegeben ist.

(2) Wenden Sie den Mittelwertsatz (Theorem 8.29) auf die obige Funktion F an, um die Formel
$$R^f_{x_0,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_C)}{n!}(x-\xi_C)^n(x-x_0)$$
für das Restglied von f um x_0 nach Cauchy zu beweisen.

(3) Verwenden Sie den verallgemeinerten Mittelwertsatz (Satz 8.48) für obiges F und die Funktion
$$t \in (a,b) \longmapsto (x-t)^{n+1}$$
um die Formel
$$R^f_{x_0,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_L)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$
für das Restglied von f um x_0 nach Lagrange zu beweisen.

Aufgabe 8. Multiple choice Aufgabe.

(1) Die Differentialgleichung
$$y'' + 2\sin(x)y' + y = x^2$$
ist...
- (a) ...homogen und linear.
- (b) ...inhomogen und linear.
- (c) ...homogen und nicht linear.
- (d) ...inhomogen und nicht linear.

(2) Für welche $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ konvergiert das uneigentliche Integral
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^s(x)} dx?$$
- (a) Für alle $s \geq 0$.
- (b) Nur für $s = 0$.
- (c) Nur für $s > 0$.
- (d) Nur für $s < 1$.

(3) Der Integralsinus Si: $x \longmapsto \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$
- (a) ist stetig differenzierbar aber nicht zweimal differenzierbar.
- (b) ist glatt.
- (c) ist nur für $x \neq 0$ definiert und $\lim_{x\searrow 0} \mathrm{Si}(x) = \infty$.
- (d) erfüllt $\lim_{x\to 0} \mathrm{Si}(x) = 1$.

(4) Welche ist die allgemeine Lösung auf $\mathbb{R}$ der Differenzialgleichun $y' + y + x = 0$?
- (a) $y = -x + 1 + C$
- (b) $y = C\exp(-x) - x + 1$
- (c) $y = -x^2 + x + C$
- (d) Diese Differenzialgleichung hat keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung.

(5) Das zweite Taylor-Polynom von $x \longmapsto \tan(x)$ bei $x_0 = \pi/4$ ist
- (a) $1 + 2(x-x_0) + 2(x-x_0)^2$.
- (b) $1 + 2(x-x_0) + 4(x-x_0)^2$.
- (c) $(x-x_0) + 2(x-x_0)^2$.

(d) $(x - x_0) + 4(x - x_0)^2$.