Lösungen zur Übungsserie 4

Aufgabe 1. (1) Seien $I_i \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle für $i \in 1, ..., N$. Zeigen Sie, dass

$$I := \bigcap_{i=1}^{N} I_i$$

ein Intervall ist. Angenommen $I \neq \varnothing$, welche sind die Endpunkte von I?

(2) Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle. Wann ist $I \cup J$ ein Intervall? Was geschieht in diesem Fall, wenn man zwei Intervalle des selben Typs (offen, abgeschlossen, links halboffen, rechts halboffen) vereinigt?

Lösung.

(1) Wir schreiben a_i und b_i für den linke bzw. rechte Endpunkt von I_i.
Wir zeigen die Behauptung zuerst für $N = 2$. Falls $I = I_1 \cap I_2 = \varnothing$ ist, dann sind wir fertig, da $\varnothing = (x, x)$, $x \in \mathbb{R}$, ein Intervall ist. Angenommen $I = I_1 \cap I_2 \neq \varnothing$, wir zeigen, dass es ein nicht-leeres Intervall ist. Erinnerung: I ist ein Interval genau dann, wenn für alle $x, y \in I$ so dass $x \leq y$ und alle $t \in \mathbb{R}$ sodass $x \leq t \leq y$, dann $t \in I$. Seien $x, y \in I_1 \cap I_2$ so dass $x \leq y$ und betrachte ein $t \in \mathbb{R}$ so dass $x \leq t \leq y$. Für $i = 1, 2$ folgendes gilt: $x, y \in I_i$, so dass nach obere Charakterisierung von Intervalle $t \in I_i$ gilt. Es folgt direkt, dass $t \in I$. Dies zeigt, dass I ein Intervall ist.
Nach induktion über N beweist man, dass die Durschnitt von endlich viele Intervalle noch ein Intervall ist.
Die Endpunkte von I sind $\inf\{a_i \mid i = 1, ..., N\}$ und $\sup\{b_i \mid i = 1, ..., N\}$.

(2) $I \cup J$ ist ein Intervall genau dann, wenn $\overline{I} \cap J$ und $I \cap \overline{J}$ sind beide nicht-leer, wobei $\overline{I}$ ist die Vereinigung von I mit seine Endpunkte (z.B. $\overline{[0, 1)} = [0, 1]$). Die Vereinigung zwei offene (bzw abgeschlossen, links halboffen, rechts halboffen) ist wieder offen (bzw abgeschlossen, links halboffen, rechts halboffen).

$\square$

Aufgabe 2. Welche der folgenden Teilmengen sind offen? Welche abgeschlossen? Begründen Sie.

(1) $A := \varnothing \subseteq \mathbb{R}$,
(2) $B := \{2022\} \subseteq \mathbb{R}$
(3) $C := \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$,
(4) $D := \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$,
(5) $E := \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathbb{R}$,

(6) $F := E \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$,
(7) $G := \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$,
(8) $H := \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 \leq \operatorname{Im}(z) < 1\} \subseteq \mathbb{C}$.

Lösung.

(1) A ist offen: Die Definition (2.48 im Skript) ist trivialerweise erfüllt.

A ist abgeschlossen: Wir zeigen, dass $A^c = \mathbb{R}$ offen ist. Sei $x \in \mathbb{R}$, dann ist $B_\epsilon(x) \subseteq \mathbb{R}$ für alle $\epsilon > 0$.

(2) B ist nicht offen: Ein Ball der Form $B_r(2022)$ mit $r > 0$ ist nie ganz in B enthalten. Zum Beispiel gilt für jedes r, dass $\frac{r}{2} + 2022 \in B_r(2022)$ ist, aber $\frac{r}{2} + 2022 \notin B$.

A ist abgeschlossen: Sei x ein Element in $B^c = \mathbb{R} \setminus \{2022\}$. Der Ball $B_{|2022-x|}(x)$ liegt vollständig in B^c: sei $y \in B_{|2022-x|}(x)$, und nehme an, dass $y \notin B^c$, i.e. $y = 2022$. Dann $|x-y| = |x-2022|$ und $|x-y| < |x-2022|$ gleichzeitig, ein Widerspruch.

(3) B ist nicht offen: Gleich wie (2).

B ist abgeschlossen: Sei x ein Element in $C^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Dann ist $r = \inf\{|x-k| \,|\, k \in \mathbb{N}\} > 0$. Der Ball $B_r(x)$ liegt per Konstruktion von r vollständig in C^c. Denn für $y \in B_r(x)$ gilt $|x-y| < r$ und darum gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$ nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|y-k| = |x-k-(x-y)| \geq \underbrace{|x-k|}_{\geq r} - \underbrace{|x-y|}_{<r} > 0.$$

Darum ist $y \notin \mathbb{N}$, also $y \in C^c$.

(4) Wir bemerken zuerst, dass weil $\sqrt{2}$ nicht in $\mathbb{Q}$ liegt auch $q\sqrt{2}$ nicht in $\mathbb{Q}$ liegt für jedes $q \in \mathbb{Q}^\times$. Weiter überlege dir, dass auch $p + q\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ liegen kann für jedes $q \in \mathbb{Q}^\times$ und $p \in \mathbb{Q}$.

D ist nicht offen: Sei $p \in \mathbb{Q}$ und $r > 0$. Wir wollen zeigen, dass es eine irrationale Zahl in $B_r(p)$ gibt. Weil $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton wachsend ist, muss $\sqrt{2} < 2$ sein. Sei $n \in \mathbb{N}$ gross genug, so dass $\frac{1}{n} < r$. Dann ist $x = p + \frac{\sqrt{2}}{2n}$ in $B_r(p)$, aber $x \notin \mathbb{Q}$.

D ist nicht abgeschlossen: Sei $x \notin \mathbb{Q}$ und $r > 0$. Wir wollen zeigen, dass es eine rationale Zahl in $B_r(x)$ gibt. Sei n gross genug, so dass $\frac{1}{10^n} < r$ gilt. Definiere p als x auf n Stellen gerundet. Dann ist p eine rationale Zahl, welche in $B_r(x)$ liegt.

(5) E ist nicht offen: Um den Punkt $1 \in E$ gibt es keinen Ball $B_r(1)$, so dass $B_r(1) \subset E$, zum Beispiel ist für beliebiges $r > 0$ der Punkt $1 + \frac{r}{2}$ in $B_r(1)$, aber nicht in E.

E ist nicht abgeschlossen: Um den Punkt $0 \in E^c$ gibt es keinen Ball $B_r(0)$, so dass $B_r(0) \subset E^c$, zum Beispiel ist für beliebiges $r > 0$ der Punkt $\frac{1}{n}$ in $B_r(0)$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < r$, aber $\frac{1}{n}$ ist in E, also nicht in E^c.

(6) F ist nicht offen: Gleich wie (5).

F ist abgeschlossen: Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 0$ ist der Ball $B_r(x)$ mit $r = |x|$ vollständig in F^c enthalten. Genauso für $x > 1$ ist der Ball $B_r(x)$ mit $r = x - 1$ vollständig in F^c enthalten. Falls $x \in F^c$ mit $0 < x < 1$ ist, dann liegt x genau zwischen einem Paar $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}$ für ein eindeutiges $n \in \mathbb{N}, n > 0$. Sei $r = \min\{|x - \frac{1}{n+1}|, |x - \frac{1}{n}|\} > 0$. Dann ist $B_r(x)$ vollständig in F^c enthalten.

(7) G ist nicht offen: Reminder: wir sehen $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ via die Abbildung $x \in \mathbb{R} \longmapsto x + 0i \in \mathbb{C}$. Beachte, dass wir in diesem Fall *Bälle in* $\mathbb{C}$ *betrachten mussen.* Sei $x \in \mathbb{R}$, dann gibt es keinen Ball $B_r(x)$ so dass $B_r(x) \subseteq \mathbb{R}$: zum beispiel ist $x + \frac{r}{2}i \in B_r(x)$, die keine reelle Zahl ist.

G ist abgeschlossen: Sei $z \in G^c = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, dann ist $B_{\frac{|z|}{2}}(z)$ vollständig in G^c enthalten.

(8) H ist nicht offen: Sei $z \in H$ sodass $\mathrm{Im}(z) = 0$. Dann gilt $z - \frac{r}{2}i \notin H$ für alle $r > 0$, so es existiert kein Ball der Form $B_r(z)$, die vollständig in H enthalten ist.

H ist nicht abgeschlossen: Sei $z \in H^c$ sodass $\mathrm{Im}(z) = 1$. Dann die gleicht Begründung wie oben zeigt man, dass es kein Ball der Form $B_r(z)$ existiert, die vollständig in H^c enthalten ist. Dies zeigt, dass H^c nicht offen ist.

$\square$

Aufgabe 3. Finden Sie das Infimum und Supremum der folgenden Teilmengen. Besitzen sie ein Minimum, ein Maximum?

(1) $A := \{a - b \,|\, a, b \in \mathbb{R}, 3 < a < 4, 6 < b \leq 9\}$,
(2) $B := \{\frac{n}{n+1} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$,
(3) $C := \{\frac{n}{m} \,|\, m, n \in \mathbb{N}, m + n \leq 10\}$,
(4) $D := \{\frac{n}{2^n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$,
(5) $E := \left\{\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$,

Hinweis: Definiere $x_1 = \sqrt{2}$ und rekursiv $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, dann ist $E = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Für das Supremum zeigen Sie per Induktion, dass $2 - x_n$ beliebig klein wird.

(6) $F := \mathbb{Q}$
(7) Sei $x \in \mathbb{R}$: $G := \{p \in \mathbb{Q} \,|\, p < x\}$.

Lösung.

(1) Wir sehen direkt, dass $\sup A = 4 - 6 = -2$ und $\inf A = 3 - 9 = -6$ und beide nicht in A liegen.
(2) Wir bemerken zuerst, dass $\frac{n}{n+1} < \frac{m}{m+1}$ ist für $n < m \in \mathbb{N}$. Dies folgt direkt daraus, dass $n(m+1) < m(n+1)$ gilt. Darum sind sicher alle Zahlen in A grösser als die Zahl für $n = 1$, also $\frac{1}{2}$. Wir haben $\inf B = \min B = \frac{1}{2}$.
Wir behaupten nun, dass $\sup B = 1$ ist. Aus $\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n}$ folgt, dass $\frac{n}{n+1} < 1$ ist. Also $\sup B \leq 1$. Auf der anderen Seite ist kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 1$ eine obere Schranke von B, da weil $\frac{1}{n+1}$ beliebig klein sein kann, zum Beispiel kleiner als $1 - x$.

Dann ist $x < 1 - \frac{1}{n+1}$ und $1 - \frac{1}{n+1} \in B$. Beachte, dass $1 = \sup B$ nicht in B liegt. Es gibt also kein maximales Element in B.

(3) Wir sehen direkt, dass $\sup C = \frac{9}{1} = 9$ und $\inf C = \frac{1}{9}$ und beide in C liegen, somit ist $\max C = 9$ und $\min C = \frac{1}{9}$.

(4)

(5) Da die Folge x_n wachsend ist, sehen wir, dass $\inf E = \min E = x_1 = \sqrt{2}$ ist.
Wir behaupten $\sup E = 2$. Dazu berechnen wir mit dem Trick $a - \sqrt{b} = \frac{a^2-b}{a+\sqrt{b}}$, dass

(1) $$2 - x_{n+1} = 2 - \sqrt{2 + x_n} = \frac{2 - x_n}{2 + \sqrt{2 + x_n}}.$$

Wir zeigen nun per Induktion, dass $\frac{1}{2^n} > 2 - x_{n+1} > 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Wir schliessen dann wie in Teilaufgabe (b), dass $\sup E = 2$ ist.
Wir haben für $n = 0$: $1 > 2 - \sqrt{2} > 0$. Nehmen wir im Induktionschritt die Annahme für $n \geq 1$ an, dann folgt aus Gleichung (1), dass wenn $2 - x_n > 0$ auch $2 - x_{n+1} > 0$ ist. Ausserdem folgt auch aus (1) und der Induktionsannahme, dass

$$2 - x_{n+1} = \frac{2 - x_n}{2 + \sqrt{2 + x_n}} < \frac{2 - x_n}{2} < \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$$

gilt.

(6) Natürlich gilt $\inf \mathbb{Q} = -\infty$ und $\sup \mathbb{Q} = +\infty$.

(7) Wie oben ist $\inf G = \infty$. Wir behaupten, dass $\sup G = x$. Es gilt $\sup G \leq x$ nach Definition von G. Wir nehmen per Widerspruch an, dass $\sup G < x$. Archimedisches Prinzip (Satz 2.68) impliziert, dass $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ dicht ist (Korollar 2.70). Das impliziert in unserem Fall, dass ein $q \in \mathbb{Q}$ so dass $\sup G < q < x$ existiert. Aber dann $q \in G$ und $q > \sup G$, ein Widerspruch. Dies zeigt $\sup G = x$.

□

Aufgabe 4. Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ nicht leere, von oben beschränkte Teilmengen, mit der Eigenschaft $x \geq 0$ für alle $x \in X$ und $y \geq 0$ für alle $y \in Y$. Zeigen Sie, dass

$$XY := \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$$

von oben beschränkt ist, und dass $\sup(XY) = \sup(X)\sup(Y)$ gilt. Geben Sie ein Beispiel von nicht-leeren und von oben beschränkten Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ so dass $\sup(AB) \neq \sup(A)\sup(B)$.

Lösung. Wir beweisen zuerst, dass $\sup X \sup Y \leq \sup XY$: Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es $x \in X$ und $y \in Y$ so dass $\sup X \leq x + \epsilon$ und $\sup Y \leq y + \epsilon$ ist. Weil $x \geq 0$ und $y \geq 0$ sind, ist auch $\sup X \geq x \geq 0$ und $\sup Y \geq y \geq 0$. Für das Produkt gilt dann

$$\sup X \sup Y \leq (x + \epsilon)(y + \epsilon) = xy + \epsilon(x + y) + \epsilon^2.$$

Aus der Definition von XY folgt $xy \leq \sup XY$ und darum

$$\sup X \sup Y \leq \sup XY + \epsilon(\sup X + \sup Y) + \epsilon^2.$$

Da diese Ungleichung für alle $\epsilon > 0$ erfüllt ist, folgt

$$\sup X \sup Y \leq \sup XY.$$

Ähnlich beweisen wir, dass $\sup XY \leq \sup X \sup Y$: Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es $z \in XY$, so dass $\sup XY \leq z + \epsilon$. Aus der Definition von XY existiert ein $x \in X$, $y \in Y$ mit $z = xy$. Wir haben also

$$\sup XY \leq xy + \epsilon \leq \sup X \sup Y + \epsilon.$$

Da diese Ungleichung für alle $\epsilon > 0$ erfüllt ist, folgt dass

$$\sup XY \leq \sup X \sup Y.$$

Wenn X oder Y unbeschränkt ist, brauchen wir $\infty \cdot 0 = 0$ und $\infty \cdot a = \infty$ für alle $a > 0$ oder $a = \infty$. $\square$

Aufgabe 5. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Gilt $\sup(\lfloor A \rfloor) = \lfloor \sup(A) \rfloor$? $\lfloor \cdot \rfloor$ ist die Abrundungsfunktion und $\lfloor A \rfloor := \{\lfloor a \rfloor \mid a \in A\}$.

Lösung. Erinnerung: Nach Archimediscen Prinzip es existiert für alle $x \in \mathbb{R}$ ein eine eindeutig bestimmte ganze Zahl $n \in \mathbb{N}$ so dass $n \leq x \leq n+1$ und wir definieren den ganzzahlige Anteil von x als $\lfloor x \rfloor := n$. Die Abrundungsfunktion ist die Abbildung $x \in \mathbb{R} \longmapsto \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$.
Sei jetzt zum Beispiel $A := (-\infty, 4)$. Dann ist $\sup A = 4$ und damit $\lfloor \sup A \rfloor = 4$. Bemerke: $\forall x \in A : x < 4$ und somit $\lfloor x \rfloor \leq 3$. Dies zeigt $\lfloor A \rfloor = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 3\}$. Insbesondere ist $\sup \lfloor A \rfloor = 3 \neq 4 = \lfloor \sup A \rfloor$. $\square$

Aufgabe 6. Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass

$$\inf(S) = -\sup(-S)$$

wobei $-S := \{-s \mid s \in S\}$.

Lösung. Die Definition von Infimum impliziert $\inf S \leq s$ für alle $s \in S$. Somit ist $-\inf(S) \geq -s$ für alle $s \in S$. Dies zeigt, dass $-\inf S$ eine obere Schranke von $-S$ ist, i.e. $\sup(-S) \leq -\inf S$.
Wir zeigen $\sup(-S) \geq \inf S$. Da S beschränkt ist, ist auch $-S$ beschränkt. Dann gilt $-s \leq \sup(-S)$ für alle $-s \in -S$, oder äquivalent $s \geq -\sup(-S)$ für alle $s \in S$. Dies zeigt, dass $-\sup(-S)$ eine untere Schranke von S ist, i.e. $\inf S \geq -\sup(-S)$, oder äquivalent $\sup(-S) \geq -\inf S$. $\square$

Aufgabe 7. Multiple choice Fragen.

(1) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere, von oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht**?
   (a) Gilt $A \subset B$, so folgt $\sup A \leq \sup B$.
   (b) <u>Gilt $A \subseteq B$ und $A \neq B$, so folgt $\sup A < \sup B$.</u>
   Gegenbeispiel: $A = (-\infty, 0)$ und $B = (-1, 0)$.
   (c) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, wobei $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.
   (d) Ist $\sup A \in A$, so existiert das Maximum von A.

(2) Der Durchschnitt zweier allgemeiner offener Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist...
   (a) offen aber nicht abgeschlossen,
   (b) <u>offen</u>,

   (c) offen und abgeschlossen,
   (d) nicht offen.

(3) Seien $A \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist äquivalent zur Aussage, dass x_0 ein Häufungspunkt von A ist?
   (a) $\forall \varepsilon > 0\, \exists! a \in A\colon 0 < |a - x_0| < \varepsilon$
   (b) $\forall \varepsilon > 0\, \exists a \in A\colon |a - x_0| < \varepsilon$
   (c) $\underline{\exists \varepsilon_0 > 0\, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\, \exists a \in A\colon 0 < |a - x_0| < \varepsilon}$
   (d) $\forall \varepsilon > 1\, \exists a \in A\colon 0 < |a - x_0| < \varepsilon$

(4) Sei $X := \{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Was ist die Menge der Häufungspunkte von X?
   (a) $\{1\}$,
   (b) X,
   (c) $\{-1\}$,
   (d) $\underline{\{-1, 1\}.}$