MATH/PHYS/CHAB — Analysis I — HS21
Prof. Einsiedler

Probeprüfung

Die Herleitung der Resultate muss übersichtlich und vollständig sein. Die Antworten müssen begründet werden. Beweise müssen ausformuliert sein. Dies gilt für alle Teile der Prüfung ausser im Multiple-Choice-Teil (Aufgaben 7-10), wo einzig ihre Antwort auf dem Antwortblatt zählt.

1. Teil: Rechnungen (20 Punkte)

1. (a) [2 *Punkte*] Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{1}{x^2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \mathrm{d}x$.
   (b) [2 *Punkte*] Berechnen Sie das Integral $\int_0^{2\pi} x \sin(2021x) \mathrm{d}x$.
   (c) [2 *Punkte*] Berechnen Sie das Integral $\int \frac{1}{x^2-x-2} \mathrm{d}x$ mit Partialbruchzerlegung.
2. (a) [2 *Punkte*] Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \searrow 0} \frac{x^3}{x-\sin(x)\cos(x)}$.
   (b) [2 *Punkte*] Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sqrt{n} x^n$.
   (c) [2 *Punkte*] Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \to 0} x \tan(x + \frac{\pi}{2})$.
3. [4 *Punkte*] Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \cos(x) y^{\frac{1}{2}} \qquad y(0) = 2$$

   Sie dürfen dabei annehmen, dass die gesuchte Lösung y nur positive Werte annimmt.
4. [4 *Punkte*] Seien $a, b > 0$ reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n = \sqrt{ab}$$

   gilt. Sie dürfen alle Ihnen bekannten Sätze und Techniken (beispielsweise die Regel von de l'Hôpital) verwenden.

2. Teil: Theorie aus der Vorlesung (14 Punkte)

Sie werden aufgefordert, die Beweise von zwei Sätzen aus der Vorlesung zu reproduzieren. [1]

[1] Sie müssen dabei nicht unbedingt den Beweis der Vorlesung reproduzieren, da mitunter spätere Methoden der Vorlesung dasselbe Ziel auf eine einfachere Weise erreichen könnten. Allerdings darf ihr Beweis – unter der Annahme einer vernünftigen logischen Struktur der Theorie – keinen offensichtlichen Zirkelschluss erzeugen. Falls die von Ihnen angenommenen Sätze den Beweis zu einer Trivialität vereinfachen, so besteht erhöhte Gefahr, dass dieser Beweis nicht akzeptiert wird.

5. [7 *Punkte*] Formulieren und beweisen Sie den Zwischenwertsatz.

6. [7 *Punkte*] Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten $a < b$ und sei $(f_n)_n$ eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$. Beweisen Sie: Falls die Funktionenfolge gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert, ist f Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

3. Teil: Multiple Choice Fragen (12 Punkte)

Sie müssen in jeder Aufgabe in diesem Teil vier Aussagen zu einem Thema beurteilen und als Wahr (also in jedem Fall zutreffend) oder Falsch (Gegenbeispiele existieren) kennzeichnen.

Bei vier richtigen Antworten in der Aufgabe erhalten sie 3 Punkte für die Aufgabe, bei drei richtigen Antworten (und einer falsch beantworteten oder unbeantworteten Frage) 2 Punkte, und ansonsten 0 Punkte. Sie müssen Ihre Antworten auf dem vorgegebenen Antwortblatt machen aber nicht begründen. Es können jeweils 0-4 Aussagen richtig sein.[2]

7. [3 *Punkte*] Seien X, Y, Z Mengen und $f\colon X \to Y$ sowie $g\colon Y \to Z$ Funktionen. Welche der folgenden Schlüsse gelten allgemein?

   (a) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist g injektiv.

   W | F

   (b) Wenn $f^{-1}(f(A)) = A$ für jede Teilmenge $A \subseteq X$ gilt, dann ist f injektiv.

   W | F

   (c) Wenn $f(f^{-1}(B)) = B$ für jede Teilmenge $B \subseteq Y$ gilt, dann ist f surjektiv.

   W | F

   (d) Wenn f und g injektiv sind, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

   W | F

8. [3 *Punkte*] Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere, nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

   (a) Gilt $A \subseteq B$, so gilt $\sup A \leqslant \sup B$.

   W | F

   (b) Gilt $A \subseteq B$ und $A \neq B$, so gilt $\sup A < \sup B$.

   W | F

[2] Es ist wahrscheinlich klar, aber Sie sollten auf Grund dieses Punktesystems versuchen, jede Frage (so gut wie möglich) zu beantworten.

(c) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$, wobei $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

W	F

(d) $\sup(AB) = \sup A \sup B$, wobei $AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$.

W	F

9. [3 *Punkte*] Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $U(f) = \{x \in [a,b] : \ f \text{ ist nicht in } x \text{ stetig}\}$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von f. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Ist f Riemann-integrierbar, so ist $U(f) = \varnothing$.

W	F

(b) Ist $U(f)$ endlich, so ist f Riemann-integrierbar.

W	F

(c) Besitzt die Menge $U(f)$ höchstens einen Häufungspunkt, so ist f Riemann-integrierbar.

W	F

(d) Ist $U(f)$ in $[a,b]$ dicht, so ist f nicht Riemann-integrierbar.

W	F

10. [3 *Punkte*] Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. In welchen der folgenden Fälle folgt die Stetigkeit von f in x_0?

(a) Wenn $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert, so ist f in x_0 stetig.

W	F

(b) Wenn x_0 links- und rechtsseitiger Häufungspunkt von D und f in x_0 links- und rechtsseitig stetig ist, so ist f in x_0 stetig.

W	F

(c) Wenn x_0 ist kein rechtsseitiger Häufungspunkt von D und es gilt $\lim_{x\nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ist, so ist f in x_0 stetig.

W	F

(d) Wenn es eine Folge $x_n \in D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ und $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ gibt, so ist f in x_0 stetig.

W	F

4. Teil: Beweise und Anwendungen der Theorie (14 Punkte)

Sie werden aufgefordert, ähnlich zu vielen Übungsaufgaben der wöchentlichen Serien zwei neue Beweise zu finden.

11. (a) [1 *Punkt*] Formulieren Sie den Integraltest für Reihen.

(b) [6 *Punkte*] Verwenden Sie den Beweis des Integraltests, um zu zeigen, dass die Asymptotik

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{N} + \mathcal{O}(1)$$

für $N \to \infty$ gilt, oder in anderen Worten, dass $\left|2\sqrt{N} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}\right|$ durch eine von N unabhängige Konstante beschränkt ist.

12. [7 *Punkte*] Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit

$$|f'(x)| \leqslant (x^2 + 1)^{-1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ existiert.