Übungsserie 1

Abgabe bis zum 28. September

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Willkommen zur Vorlesung Analysis I!

Aufgabe 1. Sei $a > 0$. Die quadratische Ergänzung

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

führt auf die Lösung der quadratischen Gleichung, dient aber auch der Bestimmung des Minimums der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ auf $\mathbb{R}$.

(1) Zeigen Sie: f nimmt ihr Minimum $m = c - b^2/4a$ für $x = -b/2a$ an. Also, dass

$$f(x) \geq f(-b/2a) = m$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ (Ableiten nicht erwünscht).

(2) Finden Sie das Minimum der Funktion von zwei Variablen

$$f(x, y) = 2x^2 - 6xy + 9y^2 + 14x + y.$$

(Hinweis: Quadratische Ergänzung bezüglich x, dann bezüglich y).

Aufgabe 2. Zeigen Sie per Induktion folgende Identitäten für ganze Zahlen $n \geq 1$:

(1) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,
(2) $4^0 + 4^1 + 4^2 + \ldots + 4^n = \frac{4^{n+1}-1}{3}$,
(3) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie durch Induktion:

(1) Jede ganze Zahl $n \geq 8$ kann als Summe geschrieben werden, wobei nur die Zahlen 3 und 5 verwendet werden dürfen.
(2) Jede ganze Zahl $n \geq 12$ kann als Summe geschrieben werden, wobei nur die Zahlen 3 und 7 verwendet werden dürfen.

Aufgabe 4. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, derart dass

$$a \sim (a+5) \qquad \text{und} \qquad a \sim (a+8)$$

für alle $a \in \mathbb{N}$ gilt. Gilt $1 \sim 2$? Wie viele Elemente hat der Quotient $\mathbb{N}/\sim$?

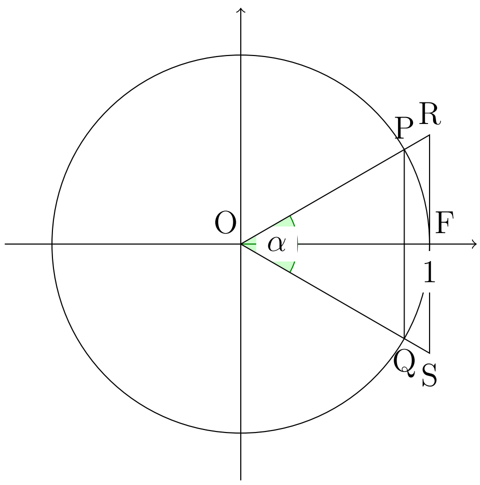
Aufgabe 5. Zeichnen Sie V Punkte auf ein Blatt Papier. Verbinden Sie die Punkte durch genug Linien (welche sich nicht schneiden und verschiedene Anfangs- und Endpunkte haben), so dass Sie ein zusammenhängendes Bild erhalten. Das heisst, es gibt einen Weg von jedem Punkt zu jedem anderen Punkt entlang der eingezeichneten Linien. Sei E die Anzahl Linien und F die Anzahl Flächen, in welche die Linien Ihr Blatt Papier teilt. Berechnen Sie,

$$V - E + F$$

für verschiedene Beispiele und stellen Sie eine Vermutung auf. Beweisen Sie die Vermutung durch Induktion.

Aufgabe 6. Archimedes-Algorithmus zur Berechnung von π.

(1) Drücken Sie den Flächeninhalt $d(\alpha)$, $D(\alpha)$ der gleichschenkligen Dreiecke OPQ und ORS mit Winkel α in O durch trigonometrische Funktionen aus. Die Seiten OP, OQ haben Länge 1 und ORS hat Höhe OF der Länge 1.



(2) Zeigen Sie, dass für $0 < 2\alpha < \pi$

$$2d(\alpha) = \sqrt{d(2\alpha)D(2\alpha)} \text{ und } \frac{1}{D(\alpha)} = \frac{1}{2d(\alpha)} + \frac{1}{D(2\alpha)}.$$

Erinnerung: $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$, $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

(3) Sei a_n der Flächeninhalt eines in einem Kreis von Radius 1 eingeschriebenen regulären n-seitigen Polygons, A_n der Flächeninhalt eines umgeschriebenen regulären n-seitigen Polygons. Zeigen Sie, dass

$$a_{2n} = \sqrt{a_n A_n}, \quad \frac{1}{A_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{2n}} + \frac{1}{A_n}\right).$$

(a_{2n} ist das geometrische Mittel von a_n und A_n; A_{2n} ist das harmonische Mittel von a_{2n} und A_n.)

(4) Berechnen Sie a_6, A_6 und verwenden Sie (3) um a_{12}, A_{12} zu berechnen. Schliessen Sie dass $3 < \pi < 12(2-\sqrt{3})$.

Bemerkung: Archimedes berechnete a_{96} und A_{96} und nach Approximation der Quadratwurzeln schloss, dass $223/71 < \pi < 22/7$. Er drückte a_{2n} durch a_n und A_{2n} durch A_n aus, mit etwas komplizieren Formeln (und ohne Trigonometrie). Siehe [Arc09].

Literatur

[Arc09] Archimedes, *The Works of Archimedes: Edited in Modern Notation with Introductory Chapters*, *Cambridge Library Collection - Mathematics*, Cambridge University Press, 2009. https://doi.org/10.1017/CBO9780511695124.