Übungsserie 2

Abgabe bis zum 5. Oktober

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Versuchen Sie Ihren Schreibstil zu üben. Um zum Beispiel die Regel $-0 = 0$ zu beweisen, wird etwa folgendes Argument erwartet:

> Das additive Inverse -0 von 0 muss nach Definition der Inversen die Eigenschaft $(-0) + 0 = 0 + (-0) = 0$ erfüllen. Da aber die Definition des neutralen Elementes besagt, dass $0 + 0 = 0 + 0 = 0$ gilt und weil die Inverse in einer Gruppe eindeutig ist, muss $-0 = 0$ gelten.

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die folgenden weiteren Rechenregeln:

(1) $-(x + y) = (-x) + (-y)$ (wobei wir für letzteres auch $= -x - y$ schreiben),
(2) $-(x - y) = -x + y$,
(3) $(-x)(-y) = xy$.
(4) Zeigen Sie, dass das Distributivgesetz für die Subtraktion $x(y - z) = xy - xz$ gilt.

Aufgabe 2. Sei $n, m \in \mathbb{N}$. Wir schreiben $n|m$ ("n teilt m") falls es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $m = kn$ gilt.

(1) Zeigen Sie dass $|$ eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ ist.
(2) Zeigen Sie dass $|$ keine Äquivalenzrelation ist.
(3) Ist $|$ eine lineare Ordnungsrelation?

Aufgabe 3 (Bonuspunkte nur für (1), (2) und (3))**.** Sei $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Betrachte die Äquivalenzrelation $\sim_n$ auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, welche für $a, b \in \mathbb{Z}$ gegeben ist durch

$$a \sim_n b \text{ genau dann wenn } a - b \text{ ein Vielfaches von } n \text{ ist.}$$

Sei C_n die Menge der Äquivalenzklassen.

(1) Wie viele Elemente besitzt C_n?
(2) Für jede Zahl $a \in \mathbb{Z}$ sei $[a]_n \in C_n$ die dazugehörige Äquivalenzklasse. Zeige, dass $(C_n, +)$ eine Gruppe bildet, wobei die Addition zweier Klassen $[a]_n, [b]_n \in C_n$ definiert ist als

$$[a]_n + [b]_n := [a + b]_n.$$

(3) Sei $C_n^\times = C_n \setminus \{[0]_n\}$. Ist die Multiplikation $\cdot$ geerbt von der Multiplikation auf $\mathbb{Z}$

$$[a]_n \cdot [b]_n := [a \cdot b]_n$$

wohldefiniert?

(4*) Definiert $(C_n^\times, \cdot)$ eine Gruppe? Die Existenz der multiplikativen Inversen ist nicht ganz einfach. Googlen Sie nach dem *erweiterten euklidischen Algorithmus.*

(5*) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Betrachten Sie die Vorschrift $g_{n,m}^k : C_n \longrightarrow C_m$ gegeben durch $[a]_n \longmapsto [k \cdot a]_m$. Wann definiert diese Vorschrift eine wohldefinierte Abbildung $g_{n,m}^k$?

Aufgabe 4. Es bezeichne $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ die Menge aller *endlichen* Teilmengen von $\mathbb{N}$. Ist die Menge $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ abzählbar?

Aufgabe 5. Sei K ein angeordneter Körper und seien $a, b \in K$ mit $b \neq 0$. Wir definieren

$$\frac{a}{b} := ab^{-1}$$

Seien nun $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $xyz > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Aufgabe 6. Sei K ein Körper un $L \subset K$ eine Teilmenge. Wir nennen L ein *Unterkörper* falls:

- $0_K, 1_K \in L$,
- $x + y, xy \in L$ falls $x, y \in L$,
- $-x \in L$, falls $x \in L$,
- $x^{-1} \in L$, falls $x \in L^\times = L \setminus \{0_K\}$.

Wir betrachten nun die Teilmenge $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

(1) Zeigen Sie dass L mi der Einschränkung auf $L \times L$ von $+$ und $\cdot$ ein Körper ist.

(2) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ der kleinste Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist, der $\mathbb{Q}$ und $\sqrt{2}$ enthält.

(3) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierte Operationen $+$ und $\cdot$ und der induzierten Ordnung $\leq$ ein angeordneter Körper ist, der jedoch nicht ordnungsvollständig ist.

Aufgabe 7. Multiple choice Fragen.

(1) Es existiert eine surjektive Abbildung $f : P \to \mathbb{Z}$, wobei

$$P := \{2n : \ n \in \mathbb{N}\}$$

die Menge aller geraden Zahlen bezeichnet.

(a) Wahr

(b) Falsch

(2) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist mit der üblichen Addition und Multiplikation *kein* Körper?

   (a) $\mathbb{Q}$

   (b) $\{-1, 0, 1\}$

   (c) $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

   (d) $\mathbb{R}$

(3) Sei X eine Menge mit $|X| \geq 2$. Die Relation $\subseteq$ auf $\mathcal{P}(X)$ ist ...

   (a) ... eine Äquivalenzrelation,

   (b) ... eine lineare Ordnungsrelation,

   (c) ... eine Ordnungsrelation, die nicht linear ist,

   (d) ... keins der Obigen.

(4) Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen. Wir sagen, dass $x_0 \in \mathbb{R}$ ein *Maximum* von X ist, falls $x_0 \in X$ und $x \leq x_0$ für alle $x \in X$ gilt. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ besitzen ein Maximum?

   (a) $X_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$,

   (b) $X_2 := \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$,

   (c) $X_3 := \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$,

   (d) keins der Obigen.

(5) Welche Aussage gilt für alle angeordneten Körper K und alle $x, y \in K$?

   (a) Ist $x \geq 0$ so gibt es ein $z \in K$ so dass $z^2 = x$.

   (b) Aus $x^2 \geq y^2$ folgt $x \geq y$.

   (c) Ist $x \neq 1$ so gibt es genau ein $z \in K$ so dass $x = \frac{z-1}{z+1}$.

   (d) Falls $x, y \neq 0$ und $x \leq y$ dann $1/x \geq 1/y$.