Übungsserie 4

Abgabe bis zum 19. Oktober

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. (1) Seien $I_i \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle für $i \in 1, ..., N$. Zeigen Sie, dass

$$I := \bigcap_{i=1}^{N} I_i$$

ein Intervall ist. Angenommen $I \neq \varnothing$, welche sind die Endpunkte von I?

(2) Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle. Wann ist $I \cup J$ ein Intervall? Was geschieht in diesem Fall, wenn man zwei Intervalle des selben Typs (offen, abgeschlossen, links halboffen, rechts halboffen) vereinigt?

Aufgabe 2. Welche der folgenden Teilmengen sind offen? Welche abgeschlossen? Begründen Sie.

(1) $A := \varnothing \subseteq \mathbb{R}$,
(2) $B := \{2022\} \subseteq \mathbb{R}$
(3) $C := \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$,
(4) $D := \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$,
(5) $E := \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}$,
(6) $F := E \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$,
(7) $G := \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$,
(8) $H := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Im}(z) < 1\} \subseteq \mathbb{C}$.

Aufgabe 3. Finden Sie das Infimum und Supremum der folgenden Teilmengen. Besitzen sie ein Minimum, ein Maximum?

(1) $A := \{a - b \mid a, b \in \mathbb{R}, 3 < a < 4, 6 < b \leq 9\}$,
(2) $B := \{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
(3) $C := \{\frac{n}{m} \mid m, n \in \mathbb{N}, m + n \leq 10\}$,
(4) $D := \{\frac{n}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
(5) $E := \left\{ \sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots \right\}$,
Hinweis: Definiere $x_1 = \sqrt{2}$ und rekursiv $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, dann ist $E = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Für das Supremum zeigen Sie per Induktion, dass $2 - x_n$ beliebig klein wird.
(6) $F := \mathbb{Q}$

(7) Sei $x \in \mathbb{R}$: $G := \{p \in \mathbb{Q} \,|\, p < x\}$.

Aufgabe 4. Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ nicht leere, von oben beschränkte Teilmengen, mit der Eigenschaft $x \geq 0$ für alle $x \in X$ und $y \geq 0$ für alle $y \in Y$. Zeigen Sie, dass

$$XY := \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$$

von oben beschränkt ist, und dass $\sup(XY) = \sup(X)\sup(Y)$ gilt. Geben Sie ein Beispiel von nicht-leeren und von oben beschränkten Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ so dass $\sup(AB) \neq \sup(A)\sup(B)$.

Aufgabe 5. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Gilt $\sup(\lfloor A \rfloor) = \lfloor \sup(A) \rfloor$? $\lfloor \cdot \rfloor$ ist die Abrundungsfunktion und $\lfloor A \rfloor := \{\lfloor a \rfloor \mid a \in A\}$.

Aufgabe 6. Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass

$$\inf(S) = -\sup(-S)$$

wobei $-S := \{-s \,|\, s \in S\}$.

Aufgabe 7. Multiple choice Fragen.

(1) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere, von oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht**?
   (a) Gilt $A \subset B$, so folgt $\sup A \leq \sup B$.
   (b) Gilt $A \subseteq B$ und $A \neq B$, so folgt $\sup A < \sup B$.
   (c) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, wobei $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.
   (d) Ist $\sup A \in A$, so existiert das Maximum von A.

(2) Der Durchschnitt zweier allgemeiner offener Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist...
   (a) offen aber nicht abgeschlossen,
   (b) offen,
   (c) offen und abgeschlossen,
   (d) nicht offen.

(3) Seien $A \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist äquivalent zur Aussage, dass x_0 ein Häufungspunkt von A ist?
   (a) $\forall \varepsilon > 0\, \exists! a \in A \colon 0 < |a - x_0| < \varepsilon$
   (b) $\forall \varepsilon > 0\, \exists a \in A \colon |a - x_0| < \varepsilon$
   (c) $\exists \varepsilon_0 > 0\, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\, \exists a \in A \colon 0 < |a - x_0| < \varepsilon$
   (d) $\forall \varepsilon > 1\, \exists a \in A \colon 0 < |a - x_0| < \varepsilon$

(4) Sei $X := \{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Was ist die Menge der Häufungspunkte von X?
   (a) $\{1\}$,
   (b) X,
   (c) $\{-1\}$,
   (d) $\{-1, 1\}$.