Übungsserie 5

Abgabe bis zum 26. Oktober

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und seien $f, g \in \mathbb{C}[x]$ zwei Polynome mit Grad kleiner gleich n, die auf mehr als n Punkten übereinstimmen (das heisst, $f(x) = g(z)$ gilt für mehr als n Punkte $x \in \mathbb{C}$). Zeigen Sie, dass dies $f = g$ impliziert.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass der Polynomring $\mathbb{Q}[x]$ abzählbar unendlich ist. Schliessen Sie, dass die Menge $\overline{\mathbb{Q}}$ der algebraischen Zahlen abzählbar unendlich ist

Aufgabe 3. Finden Sie je ein Beispiel für

(1) eine unbeschränkte, stetige Funktion auf einem beschränkten Intervall,
(2) eine unbeschränkte, stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall,
(3) eine unbeschränkte Funktion auf einem abgeschlossenem und beschränktem Intervall, die in höchstens einem Punkt unstetig ist.

Sie müssen keine Beweise angeben

Aufgabe 4. Sei I ein offenes Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Sei $x_0 \in I$ so, dass $f(x_0) \neq 0$ gilt. Beweisen Sie, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(y) \neq 0$ für alle $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt.

Aufgabe 5. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ nicht-leer und sei $\mathcal{F}(D)$ die Menge aller reellwertigen Funktionen auf D. Wir definieren die Relation $\leq$ auf $\mathcal{F}(D)$ wie folgt: für $f, g \in \mathcal{F}(D)$ gilt $f \leq g$ genau dann, wenn $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in D$ gilt.
Zeigen Sie, dass $\leq$ eine Ordnungrelation auf $\mathcal{F}(D)$ ist, die im Allgemeinen nicht linear ist. Unter welche Bedingungen ist $\leq$ linear?

Aufgabe 6. Verwenden Sie den binomischen Lehrsatz, um die Identität

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} \binom{n}{m} = \binom{n}{k} 2^{n-k}$$

für alle $k \leq n$ zu beweisen.

Aufgabe 7. Sei $d \in \mathbb{N}$ so dass $d \geq 2$. In dieser Übung möchten wir in Analogie zum binomischen Lehrsatz (Satz 3.28) Ausdrücke der Form $(z_1 + \ldots + z_d)^n$ für komplexe Zahlen $z_1, \ldots, z_d \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ untersuchen. Wir betrachten dazu sogenannte Multiindizes $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^d$. Sei $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ ein Multiindex so dass $|\boldsymbol{\alpha}| := \sum_{i=1}^d \alpha_i = n$ und seien $z_1, \ldots, z_d \in \mathbb{C}$ Komplexe Zahlen; wir schreiben $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_d)$. Wir definieren:

$$\binom{n}{\boldsymbol{\alpha}} := \frac{n!}{\alpha_1! \ldots \alpha_d!} \text{ und } \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}} := z_1^{\alpha_1} \ldots z_d^{\alpha_d}$$

Zeigen Sie die folgende Identität:

$$(z_1 + \ldots + z_d)^n = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^d :\ |\boldsymbol{\alpha}| = n} \binom{n}{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}}$$

Aufgabe 8. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \inf_{k \in \mathbb{Z}} |x - k|$. Skizzieren Sie den Graphen von f. Ist f stetig? Begründen Sie.

Aufgabe 9. Multiple choice Fragen

(1) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nicht-leer und sei $-A := \{-x \mid x \in A\}$. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht**?
  (a) A ist unbeschränkt genau dann, wenn $\max(\sup(A), \sup(-A))$ unendlich ist.
  (b) Falls $\min(A)$ existiert, dann ist $\min(A) = -\max(-A)$.
  (c) Ist A offen, dann ist $\sup(A) \notin A$.
  (d) Falls A beschränkt und abzählbar ist, dann ist $\max(-A) = -\inf(A)$

(2) Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$. Wie viele Summanden kommen in der Summe $\sum_{k=m}^n a_k$ vor?
  (a) $m - n - 1$
  (b) $n - m$
  (c) $n - m + 1$
  (d) $m - n + 1$

(3) Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$. Welche der folgenden Identitäten für $S = \sum_{k=m}^n a_k$ ist im Allgemeinen falsch?
  (a) $S = \sum_{i=m}^n a_{m+n-i}$
  (b) $S = \sum_{j=1}^{n-m} a_{n+1-j}$
  (c) $S = \sum_{k=0}^{n-m} a_{m+k}$
  (d) $S = \sum_{l=0}^{n-m} a_{n-l}$

(4) Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Welche der folgenden Formeln gilt **nicht** im Allgemeinen?
  (a) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
  (b) $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1}$
  (c) $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = 2^n$
  (d) $\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} = 0$

(5) Für alle beschränkten nicht leeren Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\sup(A)$ ist ein Häufungspunkt von A,

(b) Falls a und b Häufungspunkte von A sind dann ist $a = b$,

(c) Falls A abzählbar unendlich ist, dann hat A keinen Häufungspunkt,

(d) Falls A offen ist dann hat A einen Häufungspunkt.