Übungsserie 6

Abgabe bis zum 2. November

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Zeigen Sie anhand der Definition von Stetigkeit, dass die Funktion

$$\begin{aligned} h:\ \mathbb{R}\setminus\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

stetig ist.

Aufgabe 2. Sei $f \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom von ungeradem Grad. Zeigen Sie, dass f eine reelle Nullstelle besitzt.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass das Polynom $f(x) = x^2$ nicht gleichmässig stetig ist auf $\mathbb{R}$. Verifizieren Sie anhand der Definition von gleichmässige Stetigkeit (i.e. ohne Satz 3.75 (von Heine) zu benutzen), dass die Einschränkung von f auf $[0,1]$ gleichmässig stetig ist.

Aufgabe 4.

(1) Finden Sie alle stetigen Funktionen $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ so dass

$$f(2x) = f(x)$$

für alle $x \in [0,\infty)$. Gibt es solche Funktionen, die aber nicht stetig sind?

(2) Finden Sie alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so dass

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. (Challenge) Gibt es solche Funktionen, die aber nicht stetig sind?

Aufgabe 5. Beweisen Sie, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann stetig ist, wenn für alle offenen Teilmenge $O \subseteq \mathbb{R}$, $f^{-1}(O) \subseteq \mathbb{R}$ wieder offen ist.

Aufgabe 6. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Wir nennen eine reellwertige Funktion f auf D Lipschitz-stetig, falls ein $L \geq 0$ existiert mit $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in D$.

(1) Geben Sie ein, zwei Beispiele von Lipschitz-stetigen Funktionen und zeigen Sie, dass eine Lipschitz-stetige Funktion auch gleichmässig stetig ist.
(2) Zeigen Sie, dass die Wurzelfunktion $x \in [0, 2] \longmapsto \sqrt{x}$ zwar gleichmässig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.
Hinweis: Beweisen sie folgende Ungleichung: $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
(3) Zeigen Sie, dass die Wurzelfunktion $x \in [1, \infty) \longmapsto \sqrt{x}$ Lipschitz-stetig und gleichmässig stetig ist.
(4) Folgern Sie, dass die Wurzelfunktion $x \in [0, \infty) \longmapsto \sqrt{x}$ gleichmässig stetig ist.

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgaben

(1) Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist nicht gleichmässig stetig?
 (a) $f(x) = \sqrt{|x|}$
 (b) $f(x) = \min(\sqrt{|x|}, x^2)$
 (c) $f(x) = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |x - k^2|$
 (d) $f(x) = \inf_{k \in \mathbb{Z}} x \cdot |x - k|$
(2) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b < c$ und $f_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f_2 : [b, c] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. In welchem der folgenden Fälle ist die zusammengesetzte Funktion

$$\begin{aligned} f : [a, c] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f_1(x), & \text{falls } x \in [a, b], \\ f_2(x), & \text{falls } x \in (b, c] \end{cases} \end{aligned}$$

notwendigerweise stetig?
 (a) $f(b) = f_1(b)$,
 (b) $\forall \varepsilon > 0 : f_1(b - \varepsilon) = f_2(b + \varepsilon)$,
 (c) $f(b) = f_2(b)$,
 (d) In keinem dieser Fälle.
(3) Welche der folgende Funktionen ist streng monoton wachsend?
 (a) $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$,
 (b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x + x^3 + x^5 + x^6$,
 (c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3$,
 (d) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x^6}$.
(4) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $D' \subseteq D$ eine nichtleere Teilmenge von D und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?
 (a) Ist die Einschränkung $f|_{D'}$ stetig, so ist auch f stetig.
 (b) Ist $f|_{D'}$ stetig, so ist f in allen Punkten $x_0 \in D'$ stetig.
 (c) Ist D' offen in $\mathbb{R}$ und $f|_{D'}$ stetig, so ist f in allen Punkten $x_0 \in D'$ stetig.
 (d) Ist D' abgeschlossen in $\mathbb{R}$ und $f|_{D'}$ stetig, so ist f in allen Punkten $x_0 \in D'$ stetig.

(5) Definiere $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ und

$$\begin{aligned} H\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Welche der folgenden Funktionen sind stetig?

(a) $H \cdot H$
(b) $F \circ H$
(c) $H \circ F$
(d) Keine der obigen Funktionen.