# Übungsserie 7

Abgabe bis zum 9. November

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

**Aufgabe 1.** Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $f(x) = x^2$. Beweisen Sie im Detail und nur mit den aus der Vorlesung bekannten Methoden, dass

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

gilt.
Hinweis: Benutzen Sie die Formel

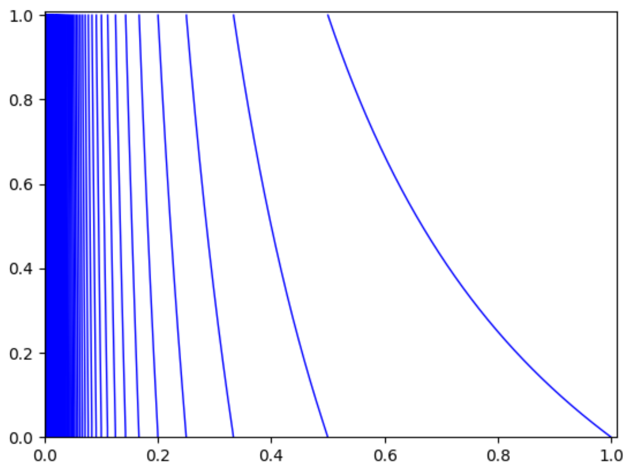
$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

die Sie mittels vollständiger Induktion beweisen.

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie, dass die Funktion $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

integrierbar ist, wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundungsfunktion bezeichnet.



**Aufgabe 3.** Seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, so dass

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b g(x)\ dx$$

gilt. Zeigen Sie, dass es ein $y \in [a, b]$ gibt, so dass $f(y) = g(y)$.

**Aufgabe 4.** Sei $f \in \mathcal{R}([a, b])$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass das *partikuläre Integral*

$$F \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \int_a^x f(t)\, dt$$

eine stetige Funktion auf $[a, b]$ definiert. Ist $F$ auch gleichmässig, oder sogar Lipschitz-stetig?

**Aufgabe 5.** Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass es ein $y \in [a, b]$ gibt, so dass

$$\int_a^b f(x)dx = f(y)(b - a)$$

ist.

**Aufgabe 6.** Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} (-2)^{-n} & \text{falls } 2^{-(n+1)} < x \leq 2^{-n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Ist die Funktion $f$ eine Treppenfunktion? Ist sie stetig oder monoton? Zeigen Sie, dass $f$ integrierbar ist, und berechnen Sie das Integral.

**Aufgabe 7.** Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, und $\lambda > 0$ eine reelle Zahl. Sei $g : [\lambda a, \lambda b] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion, welche durch $g(x) = f(\lambda^{-1}x)$ definiert wird. Zeigen Sie, dass $g$ integrierbar ist, und dass

$$\lambda \int_a^b f(x)\, dx = \int_{\lambda a}^{\lambda b} g(x)\, dx$$

gilt.

**Aufgabe 8.** Was ist der Wert des Integrals der Funktion $g$ von Aufgabe 2?
Hinweis: Suchen Sie auf dem Internet.

**Aufgabe 9.** Multiple choice Aufgaben.

(1) Was ist der Wert des Integrals

$$\int_0^3 \max(1 - x, x - 1)\ dx\ ?$$

(a) 0,

(b) $\frac{1}{\pi}$,
(c) $\frac{5}{2}$,
(d) 1.

(2) Sei $n \in \mathbb{N}$. Was ist der Wert des Integrals

$$\int_0^1 \frac{\lfloor nx^2 \rfloor}{n}\, dx \; ?$$

(a) 0,
(b) $\sqrt{\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$,
(c) $\sqrt{\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$,
(d) $\sqrt{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})$.

(3) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ Riemann-integrierbare Funktionen mit

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

für alle $x \in [a,b]$. Folgt hieraus $f \leq g$?

(a) Ja.
(b) Ja, falls $f$ und $g$ stetig sind.
(c) Ja, falls $f$ und $g$ stetig sind und $f(a) = g(a)$.
(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

(4) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Positiv- und Negativteil $f^+$ und $f^-$ von $f$ seien definiert wie in Abschnitt 4.3.2 des Skripts. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Ist $f^+$ Riemann-integrierbar, so sind $f^-$, $f$ und $|f|$ Riemann integrierbar.
(b) Ist $|f|$ Riemann-integrierbar, so sind $f^+$, $f^-$ und $f$ Riemann-integrierbar.
(c) Sind zumindest zwei der Funktionen $f$, $|f|$, $f^+$, $f^-$ Riemann-integrierbar, so sind alle dieser Funktionen Riemann-integrierbar.
(d) Keins der Obigen.