Übungsserie 8

Abgabe bis zum 16. November

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Berechnen Sie folgenden Grenzwerte anhand der Definition.

(1)
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(ni+2)^2}{n^2 i}$$

(3)
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{i}{i+1}\right)^n$$

(4)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(4+5i)n^2 + (3+i)^n}$$

Aufgabe 2. Seien $(a_n)_{n=1}^\infty$ und $(b_n)_{n=1}^\infty$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$$

gilt. Zeigen Sie auch, dass Gleichheit nicht immer gilt.

Aufgabe 3. Sei $(z_n)_{n=1}^\infty$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Folge der Cesàro-Mittel $(w_n)_{n=1}^\infty$, gegeben durch

$$w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k$$

für $n \geq 1$ konvergiert, und denselben Grenzwert wie $(z_n)_{n=1}^\infty$ hat. Überzeugen Sie sich auch davon, dass die umgekehrte Implikation nicht gilt, das heisst, dass die Konvergenz der Cesàro-Mittel nicht Konvergenz der Folge impliziert.

Aufgabe 4. Sei $D \subset \mathbb{R}$, $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge auf D und $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmässig stetig. Zeigen Sie, dass dann auch $(f(a_n))_{n=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge ist. Belegen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass dies für lediglich stetiges f nicht notwendigerweise gilt.

Aufgabe 5. (1) Die Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ sei rekursiv definiert durch

$$x_1 := 1, \quad x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n=1}^\infty$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert. Was passiert falls wir $x_1 = a$ für ein $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$, setzen?

Hinweis: Betrachten Sie zuerst $(x_{2n})_n$.

(2) Die Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ der Fibonacci-Zahlen ist rekursiv definiert durch

$$f_1 := 0, \quad f_2 := 1, \quad f_{n+2} := f_{n+1} + f_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi$$

gilt, wobei ϕ den Grenzwert aus Teilaufgabe (1) bezeichnet.

Aufgabe 6. Sei $(z_n)_{n=1}^\infty$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die reelle Folge $(|z_n|)_{n=1}^\infty$ konvergiert. Gilt die umgekehrte Implikation auch? Begründen Sie.

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgabe.

(1) Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen nicht?
   (a) Falls $\lim_{n\to\infty} a_n \in \{-\infty, \infty\}$ gilt, dann ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$;
   (b) Falls $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt, dann ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \in \{-\infty, \infty\}$;
   (c) Falls $\lim_{n\to\infty} |a_n| \in \{-\infty, \infty\}$ gilt, dann ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|} = 0$;
   (d) Falls $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ gilt, dann ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|} = \infty$.

(2) Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine reelle Folge, so dass $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 1$. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?
   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$;
   (b) $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n = 0$;
   (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$;
   (d) $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n = 1$.

(3) Seien $(a_n)_{n=1}^\infty$ und $(b_n)_{n=1}^\infty$ reelle Folgen mit Grenzwerte $a, b \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?
   (a) Falls $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $a < b$;
   (b) Falls $a_n \leq b_n$ für alle bis endlich viele $n \in \mathbb{N}$, dann ist $a \leq b$;
   (c) Falls $a \leq b$, dann ist $a_n < b_n$ für alle bis endlich viele $n \in \mathbb{N}$;
   (d) Falls $a < b$, dann ist $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(4) Welche Aussage gilt für alle Folgen $(a_n)_n$ von reellen Zahlen?
   (a) $(a_n)_n$ hat eine konvergente Teilfolge,
   (b) Jede konvergente Teilfolge von $(a_n)_n$ ist beschränkt,
   (c) Jede monotone Teilfolge von $(a_n)_n$ konvergiert,
   (d) Jede divergente Teilfolge von $(a_n)_n$ ist unbeschränkt