Übungsserie 9

Abgabe bis zum 23. November

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. (1) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x - 2}, \qquad \lim_{x\to -5} \frac{x + 2}{\sqrt{1 - x} - 2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$$

Wählen Sie dabei in jedem Fall einen geeigneten Definitionsbereich, auf dem die angegebene Formel eine Funktion definiert.

(2) Sei $p \in \mathbb{R}[T]$ ein Polynom, $p(T) = a_n T^n + \cdots + a_1 T + a_0$ und sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie

$$\lim_{x\to x_0} \frac{p(x) - p(x_0)}{x - x_0}$$

Hinweis: Beginnen Sie mit $p(T) = T^n$ und benutzten Sie dann die Linearität von lim.

Aufgabe 2. Finden Sie ein Beispiel für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass der Grenzwert der Folge $(f(n))_n$ existiert, aber nicht der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Wie übersetzt man für eine reelle Zahl $A \in \mathbb{R}$ die Aussage

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

korrekt in eine Aussage über Konvergenz von Folgen? Beweisen Sie!

Aufgabe 3. Sei V der Vektorraum aller beschränkten Folgen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$. Überprüfen Sie, dass

$$\|(x_n)_{n=0}^{\infty}\|_\infty = \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{und} \qquad \|(x_n)_{n=0}^{\infty}\|_* = \sup\{2^{-n}|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Normen $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_*$ auf V definieren. Finden Sie eine Folge $(v_n)_n$ in V, die für die Norm $\|\cdot\|_*$ konvergiert, aber nicht für die Norm $\|\cdot\|_\infty$.

Aufgabe 4. Sei $a > 0$ eine reelle Zahl, und seien $v, w \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass die Abschätzung

$$|\langle v, w\rangle| \leq \tfrac{a^2}{2}\|v\|^2 + \tfrac{1}{2a^2}\|w\|^2$$

gilt. Schliessen Sie daraus auf die Cauchy-Schwarz Ungleichung.

Aufgabe 5. Sei $(a_n)_n$ eine reelle unbeschränkte Folge. Beweisen Sie, dass eine eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ mit

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \in \{-\infty, \infty\}$$

existiert.

Aufgabe 6. Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt und $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Zeigen Sie folgende Eigenschaften von Grenzwerten.

(1) Falls $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert, ist er eindeutig bestimmt;

(2) $\lim_{x\to x_0}$ ist linear, i.e.

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

und

$$\lim_{x\to x_0}(\lambda f)(x) = \lambda \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$'

(3) $\lim_{x\to x_0}$ ist monoton, i.e. falls $f \leq g$, dann

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$$

(4) $\lim_{x\to x_0}$ ist multiplikativ, i.e.

$$\lim_{x\to x_0}(fg)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

(5) Formulieren und beweisen Sie ein Sandwich-Lemma für $\lim_{x\to x_0}$.

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgabe.

(1) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann können wir die Existenz von $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (Grenzwert der Funktion f für $x \to \infty$) und $\lim_{n\to\infty} f(n)$ (Grenzwert der Folge $(f(n))_n$) untersuchen. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?
  (a) Existiert $\lim_{n\to\infty} f(n)$, so existiert auch $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und die beiden Grenzwerte stimmen überein.
  (b) Existiert $\lim_{n\to\infty} f(n)$ und ist f monoton, so existiert auch $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und die beiden Grenzwerte stimmen überein.
  (c) Existiert $\lim_{n\to\infty} f(n)$ und ist f stetig, so existiert auch $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und die beiden Grenzwerte stimmen überein.
  (d) Keins der Obigen.

(2) Seien $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. In welchen der folgenden Fälle folgt die Stetigkeit von f in x_0 nicht?
  (a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
  (b) x_0 ist links- und rechtsseitiger Häufungspunkt von D und f ist in x_0 links- und rechtsseitig stetig.
  (c) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert.
  (d) x_0 ist kein rechtsseitiger Häufungspunkt von D und es gilt $\lim_{x\nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

(3) Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{|x|}$ ist...
  (a) Riemann-integrierbar,

(b) Lipschitz-stetig,

(c) nicht beschränkt,

(d) monoton.

(4) Welche Aussage gilt für alle stetigen Funktionen $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$?

(a) Es gibt ein $M > 0$ so dass $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in (-1,1)$.

(b) Es gibt ein $x_0 \in (-1,1)$ so dass $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in (-1,1)$.

(c) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so dass für alle $x_0, x_1 \in (-1,1)$, $|x_1 - x_0| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_0)|$.

(d) Falls $f(0) = 10$ und $f(1/10) = 1$ dann gibt es ein $x_0 \in (-1,1)$ so dass $f(x_0) = 9$.

(5) Für alle beschränkten reellen Folgen $(a_n)_n$ gilt:

(a) $a_k \leq \operatorname{limsup}_{n\to\infty} a_n$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) $\operatorname{liminf}_{n\to\infty} a_n < \operatorname{limsup}_{n\to\infty} a_n$.

(c) Es gibt eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ die gegen $\operatorname{limsup}_{n\to\infty} a_n$ konvergiert.

(d) $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \operatorname{limsup}_{n\to\infty} a_n$.