Übungsserie 10

Abgabe bis zum 30. November

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. (1) Entscheiden Sie, welche der folgenden Reihen komplexer Zahlen konvergieren.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \log(\frac{n+1}{n})$ (f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)^n}$ (g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

(2) Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen reeller Zahlen konvergieren, und berechnen Sie die Grenzwerte.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1}$

Hinweis: Faktorisieren Sie den Nenner in zwei quatratische Terme.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl mit $|x| \leq \frac{1}{2}$. Betrachten Sie die Folge $\sum_{n=0}^{\infty} x^n F_n$, wobei F_n für die n-te Fibonacci Zahl steht, also $F_0 = 0, F_1 = 1$ und rekursiv $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$.

Hinweis: Für die Konvergenz der Reihe zeigen Sie, dass $F_n \leq \phi^n$ gilt, wobei $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ der *goldene Schnitt* ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Lässt man in der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ für alle n das Glied $\frac{1}{n}$ weg, wenn n eine 9 in ihrer Dezimaldarstellung hat, so erhält man eine konvergente Reihe.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass das Cauchy-Produkt der bedingt konvergenten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

mit sich selbst divergiert.

Aufgabe 4. (1) Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergiert.}$$

(2) Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen mit $0 \leq a_n$ und a_n monoton fallend, und so dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert. Zeige, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$$

gilt.

(3) Sei $s > 1$ eine reelle Zahl. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konvergiert.

Aufgabe 5. Diskutieren Sie, welche der in der Vorlesung behandelten Konvergenzkriterien (Quotientenkriterium, Wurzelkriterium, Leibniz-Kriterium, Majorantenkriterium) für den Beweis der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1+(-1)^n}{n^2+1}$$

verwendet werden können.

Aufgabe 6. Entscheiden Sie für die Funktionenfolgen $f_n, g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) := \frac{1}{1+nx}, \quad g_n(x) := \frac{x}{1+nx}$$

ob diese punktweise bzw. gleichmässig konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion.

Aufgabe 7. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge monotoner Funktionen, die punktweise gegen eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert.

(1) Zeigen Sie, dass $(f_n)_n$ gleichmässig gegen f konvergiert.

(2) Belegen Sie durch Gegenbeispiele, dass in a) weder auf die Monotonie der f_n noch auf die Stetigkeit der Grenzfunktion f verzichtet werden kann.

Aufgabe 8. Multiple choice Aufgabe.

(1) Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen, die gleichmässig gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Falls g stetig ist, so konvergiert $g \circ f_n$ gleichmässig gegen $g \circ f$.

(b) Falls g gleichmässig stetig ist, so konvergiert $g \circ f_n$ gleichmässig gegen $g \circ f$.

(c) Falls g stetig ist, so konvergiert $g \cdot f_n$ gleichmässig gegen $g \cdot f$.

(d) Falls g gleichmässig stetig ist, so konvergiert $g \cdot f_n$ gleichmässig gegen $g \cdot f$.

(2) Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen und definiere

$$r_n := \sum_{k=n^2}^{n^2+2n} a_k$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen korrekt?

(a) Ist die Folge $(r_n)_n$ konvergent, so ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}$ konvergent.

(b) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist auch die Folge $(r_n)_n$ konvergent.

(c) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ konvergent, so ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

(d) Keins der Obigen.

(3) Welche Reihe konvergiert?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^n$,

(c) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \cdots$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}}$

(4) Sei I eine abzählbar unendliche Indexmenge und $(a_i)_{i \in I}$ eine Familie positiver reeller Zahlen. Wir wollen

$$\sum_{i \in I} a_i := \sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)},$$

definieren, wobei $\psi \colon \mathbb{N} \longrightarrow I$ eine beliebige Bijektion ist. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

(a) Diese Definition ist nicht sinnvoll, da keine Bijektion $\mathbb{N} \longrightarrow I$ existiert.

(b) Diese Definition ist nicht sinnvoll, da der Wert einer Reihe auf die Summationsreihenfolge ankommt. Der Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ hängt also von der Wahl von ψ ab.

(c) Diese Definition ist nur dann sinnvoll, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ konvergent ist. Denn dann ist diese Reihe wegen $a_i \geq 0$ auch absolut konvergent und die Summationsreihenfolge spielt keine Rolle, sodass der Wert von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ unabhängig von der Wahl von ψ ist.

(d) Diese Definition ist stets sinnvoll, da auch im Fall $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)} = \infty$ die Summationsreihenfolge keine Rolle spielt.

(5) Was ist der Wert der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \; ?$$

(a) $\frac{-1}{3}$,

(b) $\frac{2}{3}$,

(c) $\frac{1}{6}$,

(d) $\frac{1}{2}$