Übungsserie 11

Abgabe bis zum 07. Dezember

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^3}} z^n$,

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n2^n}}{(n+1)^7} z^n$,

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^{n^2}$.

Aufgabe 2. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty)$. Sei des Weiteren $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| R^n < \infty$.

(1) Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Funktion

$$z \in \overline{B_R(0)} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq R\} \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

wohldefiniert und stetig ist.

(2) Geben Sie ein Beispiel einer solchen Potenzreihe.

Aufgabe 3. Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1})^n}{n^2} z^n$$

und zeigen Sie Konvergenz der Potenzreihe bei den Punkten $-R, R \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie: $\sin(\frac{2\pi}{5}) = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

Aufgabe 5. Seien $a < b$ eine reelle Zahlen. Beweisen Sie, dass

$$\int_a^b \sin(t)dt = \cos(a) - \cos(b) \qquad \text{und} \qquad \int_a^b \cos(t)dt = \sin(b) - \sin(a)$$

gilt.

Aufgabe 6. Sei $B := B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$, und für $n \geq 0$, sei $f_n : B \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$. Sei $f : B \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = (1-z)^{-1}$. Erklären Sie detailliert was die folgenden Aussagen bedeuten, und beweisen Sie:

(1) Die Folge von Funktionen $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert punktweise gegen f.
(2) Die Folge von Funktionen $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert nicht gleichmässig gegen f.
(3) Sei $r < 1$ eine reelle Zahl, und $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$. Die Folge von Funktionen $(f_n|_D)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gleichmässig gegen $f|_D$.

Aufgabe 7. Wir schreiben $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(1) Sei c eine komplexe Zahl. Bestimmen Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid \exp(z) = c\}$.
(2) Angenommen $c \neq 0$. Zeigen Sie, dass es genau eine komplexe Zahl z gibt, mit

$$-\pi < \mathrm{Im}(z) \leq \pi \qquad \text{und} \qquad \exp(z) = c.$$

Die Funktion $\mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}$ die $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die in (2) charakterisierte eindeutige Zahl z zuordnet, heisst **Hauptzweig** des komplexen Logarithmus.

(3) Zeigen Sie, dass der Hauptzweig des komplexen Logarithmus nicht stetig ist, und bestimmen sie die Unstetigkeitsstellen.
(4) Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $L : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}$ gibt, mit $\exp(L(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}^\times$.

Aufgabe 8. Multiple choice Aufgabe.

(1) Sei $(a_n)_n$ eine Folge mit $a_n \in \{2, 3\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n}$$

(a) ... konvergiert bedingt,
(b) ... konvergiert absolut,
(c) ... konvergiert bedingt oder divergiert,
(d) ... konvergiert. Die Konvergenz kann sowohl bedingt als auch absolut sein, abhängig von der Folge $(a_n)_n$.

(2) Für welche Zahlen $z \in \{1, i+1, 3, 2\}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n + n} z^{2n}$$

(a) keine,
(b) $z \in \{1, 3\}$,
(c) $z \in 1, 1+i$,
(d) $z \in \{2, 3\}$.

(3) Was ist der Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=1} n! z^n$$

(a) 0,
(b) $\frac{1}{2}$,
(c) 1,
(d) ∞.

(4) Welche Aussage ist für jede durch eine Reihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit Konvergenzradius R definierte Funktion $f\colon (-R, R) \longrightarrow \mathbb{C}$?

(a) Falls $\lim_{x \nearrow R} f(x)$ existiert dann konvergiert die Reihe für $x = R$.
(b) Falls die Reihe für $x = R$ gegen $s \in \mathbb{C}$ konvergiert dann existiert der Grenzwert $\lim_{x \nearrow R} f(x)$ aber er stimmt nicht immer mit s überein.
(c) Falls die Reihe für $x = R$ konvergiert dann definiert sie eine stetige Funktion $f\colon (-R, R] \longrightarrow \mathbb{C}$.
(d) Falls die Reihe für $x = R$ konvergiert dann konvergiert sie für $x = R$ absolut.