Übungsserie 12

Abgabe bis zum 14. Dezember

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

(a) $\sqrt{1+x^2}$ (b) $\cos(\cos x)$ (c) $\exp\left(\frac{1}{1+x^4}\right)$

(d) $\frac{e^x-1}{e^x+1}$ (e) $x^{\sin x}$ (definiert nur für $x > 0$) (f) $\frac{(x^2\cos x+2)^2}{\log(2+x^2)+x^6}$

Aufgabe 2. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{\sin(x)-x}{x^2\sin(x)}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-x-1}{\cos x - 1}$ (c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-4^x}{\sin \pi x}$

(d)* $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{e^x+x}$ (e) $\lim\limits_{x\searrow 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{\sqrt{\ln x}}\left(\sqrt{\ln x}\right)^x}{\sqrt{x}^{\ln x}(\ln x)^{\sqrt{x}}}$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass Ableitungen die Zwischenwerteigenschaft besitzen: Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und ist $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so nimmt f' jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ an.

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, derart, dass $f(x) = f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(1) Zeigen Sie, dass eine reelle Zahl c existiert, mit $f(x) = c \cdot \exp(x)$.

(2) Was passiert, falls f nur Definitionsbereich $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ anstatt $\mathbb{R}$ hat und ebenfalls $f' = f$ erfüllt?

Aufgabe 5. Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$.
Zeigen Sie: Falls ein $M \geq 0$ existiert, so dass $|f'(x)| \leq M\,|f(x)|$ für alle $x \in [0,1]$ gilt, dann folgt $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $e^{-2Mx}f^2(x)$.

Aufgabe 6. Finden Sie ein Gegenbeispiel für jede falsche Aussage in Aufgabe 7.(1).

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgabe.

(1) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall positiver Länge und $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?
 (a) Ist f differenzierbar, so ist f gleichmässig stetig.
 (b) Ist f differenzierbar in $a \in I$, so ist f stetig in a.
 (c) Ist f differenzierbar, so ist f Lipschitz-stetig.
 (d) Ist f differenzierbar, so ist f' stetig.

(2) Betrachte die folgende Aussage: "Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall positiver Länge und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$f'(x) \neq 0$$

für alle $x \in I$. Dann ist f streng monoton.". Diese Aussage...
 (a) ... gilt im Allgemeinen.
 (b) ... gilt nicht im Allgemeinen. Die Aussage stimmt aber, wenn f stetig differenzierbar ist.
 (c) ... selbst für stetig differenzierbares f gilt dies nicht im Allgemeinen.
 (d) ... gilt nie.

(3) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall positiver Länge und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?
 (a) Nimmt f ein lokales Extremum bei x_0 an, so ist $f'(x_0) = 0$.
 (b) Ist $x_0 \in I$ kein Endpunkt von I und gilt $f'(x_0) = 0$, so nimmt f ein lokales Extremum bei x_0 an.
 (c) Seien $a := \inf(I)$ und $b := \sup(I)$. Dann liegen alle Extremalstellen von f in der Menge $\{a, b\} \cup \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$.
 (d) Sei $a := \inf(I) \in I$. Dann nimmt f ein lokales Extremum bei a an

(4) Welche der folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$ ist *nicht* bei $x_0 = 0$ differenzierbar?
 (a) $f(x) = \sqrt{|x|} \sin \sqrt{|x|}$,
 (b) $f(x) = |x|^{3/2}$,
 (c) $f(x) = x^2 g(x)$ wobei $g(x) = 1$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $g(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
 (d) keine. Alle Funktionen in (a)-(c) sind bei 0 differenzierbar.

(5) Welche Aussage ist falsch?
 (a) $|x|^{3/2} = o(x)$, $(x \longrightarrow 0)$.
 (b) Für jede stetige Funktion $f\colon (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ und alle $x_0 \in (a, b)$ gilt: $f(x) - f(x_0) = o(x - x_0)$, $(x \longrightarrow x_0)$.
 (c) $\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$, $(x \longrightarrow 0)$.
 (d) $\cos(x) = 1 + o(x)$, $(x \longrightarrow 0)$.