Übungsserie 13

Abgabe bis zum 21. Dezember

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.

(1) Zeigen Sie, dass jedes lokale Minimum von f ein (globales) Minimum ist.

(2) Zeigen Sie, dass falls f streng konvex ist und ein Minimum bei $x_0 \in I$ annimmt, dann ist $f(x) > f(x_0)$ für alle $x \in I \setminus \{x_0\}$.

Aufgabe 2. Seien $p, q > 1$ reelle Zahlen, welche $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ erfüllen. Beweisen Sie, dass für alle nichtnegative reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

gilt.

Hinweis: Definieren Sie eine geeignete Funktion und bestimmen Sie ihr Minimum.

Aufgabe 3. Berechnen Sie mit partieller Integration

(1) das unbestimmte Integral $\int x^2 \sin x \, dx$,

(2) rekursive Formeln für folgende unbestimmte Integrale

$$a_n = \int x^n \exp x \, dx, \qquad b_n = \int x^n \sin x \, dx \qquad \text{und} \qquad c_n = \int x^n \cos x \, dx$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_0$,

(3) die unbestimmten Integrale $\int x^a \log x \, dx$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Beachten Sie, dass der Fall $a = -1$ getrennt zu behandeln ist.

(4) die Integrale $\int \exp(ax) \sin(bx) \, dx$ für $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 4. Seien $a < b$ reell, und seien $f, g : [a, b] \to [0, \infty)$ stetige Funktionen, derart, dass

$$f(x) \leq f(a) + \int_a^x f(t)g(t)dt$$

für alle $x \in [a, b]$ gilt. Zeigen Sie folgende Ungleichung:

$$f(x) \leq f(a) \exp\left(\int_a^x g(t)dt\right) \qquad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Aufgabe 5. Benutzen Sie die Zwischenwerteigenschaft von Ableitungen (siehe Übungsserie 12, Aufgabe 4) um folgende Probleme zu lösen.

(1) Sei $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \frac{\sqrt[x]{e}+1}{\sqrt[x]{e}}$$

Zeigen Sie, dass keine **differenzierbare** Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F'(x) = f(x) \text{ für alle } x \neq 0$$

existiert.

(2)* Sei $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für } x \neq 0, \\ 1, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass keine Funktion $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$G' = g$$

existiert.

Aufgabe 6. Finden Sie ein Gegenbeispiel für jede falsche Aussage in Aufgabe 8.(2).

Aufgabe 7. Verwenden Sie folgende Ressource, um die Berechnung von Integralen zu üben:

`https://moodle-app2.let.ethz.ch/course/view.php?id=17981`

Aufgabe 8. Multiple choice Aufgaben.

(1) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Welche der folgende Aussage gilt nicht im Allgemeinen?
  (a) Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, so ist f monoton wachsend.
  (b) Ist f monoton wachsend, so gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$.
  (c) Ist f streng monoton wachsend, so gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$.
  (d) Alle Aussage gelten im Allgemeinen.

(2) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgende Aussage gilt im Allgemeinen?
  (a) Ist I kompakt und f Riemann-integrierbar, so besitzt f eine Stammfunktion.
  (b) Besitzt f eine Stammfunktion, so ist f stetig.
  (c) Ist f differenzierbar, so besitzt f eine Stammfunktion.
  (d) Besitzt f eine Stammfunktion und ist I kompakt, so ist f Riemann-integrierbar.

(3) Welche Aussage über eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist *falsch* im Allgemeinen?
  (a) $x \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ist eine Stammfunktion von f.
  (b) $x \longmapsto -\int_x^b f(t)dt$ ist eine Stammfunktion von f.

(c) $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ für jede Stammfunktion von f und alle $x \in [a, b]$.

(d) Falls f stetig differenzierbar ist dann $f(x) = \int_a^x f'(t)dt$.

(4) Welche Aussage ist wahr?

(a) $\int_0^2 \sin(x^2)dx = \int_0^{\sqrt{2}} \sin(x)dx$.

(b) $\int_0^2 \sin(x^2)dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} x^{-1/2} \sin(x)dx$.

(c) $\int \sin(x^2)dx = \frac{\sin(x^2)}{2x} + C$.

(d) $\int_0^2 \sin(x^2)dx = 2 - \int_0^2 \cos(x^2)dx$.