Übungsserie 14

Keine Abgabe

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen

$$\text{(a) } y' + y = 1, \quad \text{(b) } -2y' + y = e^x, \quad \text{(c) } y' = xy^2, \quad \text{(d) } y' = 1 + y^2$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale:

$$\text{(a) } \int_1^\infty xe^{-x}\,dx, \quad \text{(b) } \int_0^2 \frac{2x}{x^2-4}\,dx, \quad \text{(c) } \int_1^3 (x-1)^{-\frac{2}{3}}\,dx, \quad \text{(d) } \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$$

Aufgabe 3. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall mit $a := \inf(I) \in I$. Sei des Weiteren $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $y\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$y'(x) \le f(x)y(x)$$

für alle $x \in I$. Beweisen Sie für $x \in I$ die Ungleichung

$$y(x) \le y(a)\exp\left(\int_a^x f(t)\,dt\right).$$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Werte $a \in \mathbb{R}$ für welche die Reihe

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\log(n)^a}$$

konvergiert.

Aufgabe 5. Wir zeigen, dass π irrational ist.
Wir nehmen per Widerspruch an, dass $\pi = \frac{a}{b}$ für irgendwelche $a, b \in \mathbb{N}$ gilt. Sei $n \in \mathbb{N}$, und betrachte folgende Polynome

$$f_n(x) := \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$$

und

$$F_n(x) := \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k f^{(2k)}(x)$$

(1) Begründen Sie, wieso f_n, alle Ableitungen von f_n, und F_n bei 0 und bei π ganzzahlige Werte annehmen. Verifizieren Sie des Weiteren, dass $(f_n)|_{[0,]}$ eine nicht-negative Funktion ist, welche genau bei 0 und π verschwindet.

(2) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\; dx = F_n(\pi) + F_n(0)$$

gilt.

(3) Schliessen Sie auf einen Widerspruch.

Aufgabe 6. Finden Sie die Taylorreihen von $f(x) := \frac{1}{x}$ und von $g(x) := \sin(x)$ um $x_0 = 1$.

Aufgabe 7. Gegeben sei ein nichtleeres offenes Intervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, reelle zahlen $x, x_0 \in (a, b)$ und eine $(n+1)$-Mal differenzierbare Funktion $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$

(1) Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion

$$F : t \in (a, b) \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

durch

$$t \in (a, b) \longmapsto \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

gegeben ist.

(2) Wenden Sie den Mittelwertsatz (Theorem 8.29) auf die obige Funktion F an, um die Formel

$$R^f_{x_0,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_C)}{n!}(x-\xi_C)^n(x-x_0)$$

für das Restglied von f um x_0 nach Cauchy zu beweisen.

(3) Verwenden Sie den verallgemeinerten Mittelwertsatz (Satz 8.48) für obiges F und die Funktion

$$t \in (a, b) \longmapsto (x-t)^{n+1}$$

um die Formel

$$R^f_{x_0,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_L)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

für das Restglied von f um x_0 nach Lagrange zu beweisen.

Aufgabe 8. Multiple choice Aufgabe.

(1) Die Differentialgleichung

$$y'' + 2\sin(x)y' + y = x^2$$

ist…

(a) …homogen und linear.

(b) …inhomogen und linear.

(c) …homogen und nicht linear.

(d) …inhomogen und nicht linear.

(2) Für welche $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^s(x)} dx?$$

(a) Für alle $s \geq 0$.
(b) Nur für $s = 0$.
(c) Nur für $s > 0$.
(d) Nur für $s < 1$.

(3) Der Integralsinus $\mathrm{Si}\colon x \longmapsto \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$

(a) ist stetig differenzierbar aber nicht zweimal differenzierbar.
(b) ist glatt.
(c) ist nur für $x \neq 0$ definiert und $\lim_{x \searrow 0} \mathrm{Si}(x) = \infty$.
(d) erfüllt $\lim_{x \to 0} \mathrm{Si}(x) = 1$.

(4) Welche ist die allgemeine Lösung auf $\mathbb{R}$ der Differenzialgleichun $y' + y + x = 0$?

(a) $y = -x + 1 + C$
(b) $y = C \exp(-x) - x + 1$
(c) $y = -x^2 + x + C$
(d) Diese Differenzialgleichung hat keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung.

(5) Das zweite Taylor-Polynom von $x \longmapsto \tan(x)$ bei $x_0 = \pi/4$ ist

(a) $1 + 2(x - x_0) + 2(x - x_0)^2$.
(b) $1 + 2(x - x_0) + 4(x - x_0)^2$.
(c) $(x - x_0) + 2(x - x_0)^2$.
(d) $(x - x_0) + 4(x - x_0)^2$.