Übungsserie 3

Abgabe bis zum 12. Oktober

Bonuspunkte können in Aufgabe 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Zeichnen Sie folgende Teilmengen der komplexen Ebene.

(1) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 3\}$
(2) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z^2) \geq 0\}$
(3) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leq 3,\ |z| \leq 3,\ |z-i| \leq 3\}$
(4) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z+1) = \mathrm{Re}(z+iz),\ |z| \leq 2\}$
(5) $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 1,\ \left|\frac{z}{z-1}\right| \leq 1\}$
(6) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| + |z+1| \leq 4\}$

Aufgabe 2. (1) Finden Sie eine lineare Ordnungsrelation $\leq$ auf $\mathbb{C}$ so dass:
- (a) $z \leq w \implies z+u \leq w+u$ für alle $z, w, u \in \mathbb{C}$.
- (b) $0 \leq x$ und $0 \leq z \implies 0 \leq xz$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$

(2) Zeigen Sie dass es keine lineare Ordnungsrelation auf $\mathbb{C}$ gibt, die $\mathbb{C}$ zu einem angeordneten Körper macht.

Hinweis: Zeigen Sie dass $-1 < 0 < 1$ in jedem angeordenten Körper gilt.

Aufgabe 3. Folgern Sie aus Satz 2.15 oder aus Satz 2.19 im Skript die folgenden Varianten der vollständigen Induktion.
Sei hierzu $A(n)$ eine beliebige Aussage über natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$.

(1) Angenommen die Aussagen
- (a) (Induktionsanfang) $A(1)$ und $A(2)$,
- (b) (Induktionsschritt) $\forall n \in \mathbb{N} : \ (A(n) \wedge A(n+1) \Rightarrow A(n+2))$,

gelten, dann gilt ebenso $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2) Falls für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ die Aussagen
- (a) (Induktionsanfang) $A(n_0)$,
- (b) (Induktionsschritt) $\forall n \in \mathbb{N} : \ ((n \geq n_0 \wedge A(n)) \Rightarrow A(n+1))$

gelten, dann gilt auch $A(n)$ für alle natürliche Zahlen $n \geq n0$.

Aufgabe 4 (Anwendung von Aufgabe 3)**.** Die Fibonacci-Zahlen $f_0, f_1, f_2, \ldots$ sind durch

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \text{ für } n \geq 1$$

rekursiv definiert.

(1) Beweisen Sie die Identität

$$f_{m+n} = f_m f_{n+1} + f_{m-1} f_n$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

(2) Beweisen Sie: Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ ist f_{kn} ein Vielfaches von f_n.

(3) Beweisen Sie: Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $f_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n$ für alle $n \geq n_0$.

Aufgabe 5. Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Zeigen Sie, dass

$$x \leq y \iff x^3 + x \leq y^3 + y$$

für alle $x, y \in K$ gilt.

Aufgabe 6. Bestimmen Sie die Real- und Imaginärteile, den Betrag und das komplex Konjugierte von

(1) $z = \frac{i-4}{2i-3}$,

(2) $z = \frac{2\sqrt{2}i}{i-1}$,

(3) $z = \overline{(2-i)^3}$,

(4) $z = \left(\overline{2-i}\right)^3$

Aufgabe 7. Zeigen Sie die folgende Behauptung: für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n \leq m+1$ gilt $n = m$ oder $n = m+1$.

Aufgabe 8 (Challenge)**.** Wir betrachten die komplexen Zahlen $z = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$ und $w = \frac{1}{\sqrt{10}}(3 + i)$. Überprüfen Sie dass $|z| = 1$ und $|w| = 1$ gilt, und zeichnen Sie die ungefähre Position von z und w in der komplexen Ebene.

(1) Mit Maschinenhilfe, berechnen Sie $z, z^2, z^3, z^4, \ldots$ sowie $w, w^2, w^3, w^4, \ldots$ und zeichnen diese Punkte in der komplexen Ebene.

(2) Berechnen Sie z^n für alle $n \in \mathbb{Z}$. Formulieren Sie eine Vermutung über die Menge $\{w^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ und beweisen Sie davon was Sie können.

Der Beweis der Vermutung ist schwierig und kann weggelassen werden.

Hinweis: Verwenden Sie $\arctan\left(\frac{1}{3}\right) \notin \mathbb{Q}$ ohne Beweis.

Aufgabe 9. Multiple choice Fragen.

(1) Betrachte die folgende Menge

$$X := \left\{ x \in \mathbb{R} : \ 2x + \frac{3}{x} + 7 \leq 0 \right\}$$

Welche der folgenden Mengen ist gleich X?

(a) $\varnothing$,

(b) $(-\infty, -3) \cup (-\frac{1}{2}, 0)$
(c) $(-\infty, 0)$,
(d) $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, 3)$,
(e) keins der Obigen.

(2) Sei $x \in \mathbb{R}$. Welcher Ausdruck entspricht stets $\sqrt{x^2}$?
(a) x,
(b) $\pm x$,
(c) $|x|$,
(d) keins der Obigen.

(3) Wie viele Lösungen besitzt die Gleichung $z^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{C}$?
(a) 0,
(b) 1,
(c) 2,
(d) > 2.

(4) Seien $w, z \in \mathbb{C}$. Welche der folgenden Aussage gilt im Allgemeinen nicht?
(a) $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
(b) $\operatorname{Re}(z^2) = (\operatorname{Re} z)^2$.
(c) $|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.
(d) Aus $z^4 = w^4$ folgt $|z| = |w|$.

(5) Sei $z = i^{23}$. Welche der folgenden Aussagen gilt?
(a) $|z| = 0$ und $\overline{z} = i$,
(b) $|z| = 1$ und $\overline{z} = -i$,
(c) $|z| = 1$ und $\overline{z} = i$,
(d) $|z| = 0$ und $\overline{z} = -i$,