Wiederholungsserie

1. Beweise für beliebige Untergruppen $H_1 < G > H_2 > H_2'$ die Ungleichungen

   (a) $[H_1 : H_1 \cap H_2] \leqslant [G : H_2]$.

   (b) $[G : H_1 \cap H_2] \leqslant [G : H_1] \cdot [G : H_2]$.

   (c) $[H_1 \cap H_2 : H_1 \cap H_2'] \leqslant [H_2 : H_2']$.

2. Sei H eine echte Untergruppe einer endlichen Gruppe G.

   (a) Zeige, dass die Vereinigung aller Konjugierten von H nicht gleich G ist. (*Hinweis:* Zähle die Elemente in der Vereinigung $\bigcup_{g\in G} {}^gH$.)

   *(b) Gilt diese Aussage auch, wenn G nicht endlich ist?

*3. *(Lemma von Goursat)*. Betrachte Gruppen G_1 und G_2 und eine Untergruppe H von $G_1 \times G_2$, so dass die beiden Projektionen $p_i : H \to G_i$ surjektiv sind. Zeige, dass es normale Untergruppen $N_1 \lhd G_1$ und $N_2 \lhd G_2$ gibt mit $(N_1 \times N_2) \lhd H$, so dass
$$H/(N_1 \times N_2) \;<\; (G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \;\cong\; (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$$
der Graph eines Isomorphismus $G_1/N_1 \xrightarrow{\sim} G_2/N_2$ ist.

4. Sei H eine Untergruppe einer Gruppe G und betrachte die Abbildung
$$\sigma\colon H \times G \to G,\ (h, g) \mapsto hg.$$

   (a) Zeige, dass σ eine Linksoperation ist.

   (b) Bestimme die Bahnen von σ.

   (c) Wann ist die Operation σ transitiv, frei, treu, beziehungsweise trivial? Welches sind ihre Fixpunkte?

5. Für eine natürliche Zahl n sei X die Menge aller Elemente der Ordnung 2 von S_n, auf der die S_n durch Konjugation operiert.

   (a) Bestimme die Anzahl und Längen der Bahnen dieser Operation.

   (b) Wann ist die Operation transitiv, frei, treu, beziehungsweise trivial? Welches sind ihre Fixpunkte?

6. Für welche positiven ganzen Zahlen k, ℓ, m, n enthält die symmetrische Gruppe S_n einen k-Zykel und einen ℓ-Zykel, deren Produkt ein m-Zykel ist?

7. Beschreibe die Ringe

(a) $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})[X]/(2X-4)$.
(b) $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})[X]/(2X-1)$.
(c) $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[X]/(3X^2+3X+1)$.

*8. Sei R ein von Null verschiedener Ring und sei $a \in R \setminus \{0\}$. Wann ist der natürliche Homomorphismus $\varphi\colon R \to R[X]/(aX-1)$ injektiv?

9. Finde für die folgenden reellen Zahlen x ein annullierendes Polynom von x über $\mathbb{Q}$ und folgere daraus eine einfachere Darstellung von x.

(a) $x = \sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}$.
(b) $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

10. Sind die folgenden Körper isomorph?

(a) $\mathbb{Q}[X]/(X^2-2)$ und $\mathbb{Q}[X]/(X^2+2)$;
(b) $\mathbb{Q}[X]/(X^2+1)$ und $\mathbb{Q}[X]/(X^2+2)$;
(c) $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ und $\mathbb{R}[X]/(X^2+2)$;
(d) $\mathbb{Q}[X]/(X^3-2)$ und $\mathbb{Q}[X]/(X^3+2)$.

11. Betrachte die reellen Zahlen $\alpha := \sqrt{2}$ und $\beta := \sqrt{3}$ und setze $\gamma := \alpha + \beta$. Gilt $\mathbb{Q}[\alpha, \beta] = \mathbb{Q}[\gamma]$ als Unterringe von $\mathbb{R}$? Gilt $\mathbb{Z}[\alpha, \beta] = \mathbb{Z}[\gamma]$?

12. Sei L/K eine endliche Körpererweiterung und sei $f \in K[X]$ irreduzibel.

(a) Zeige: Sind $\deg(f)$ und $[L/K]$ teilerfremd, so ist f irreduzibel über L.
(b) Gib Beispiele von irreduziblen Polynomen in $K[X]$ an, deren Grad nicht teilerfremd zu $[L/K]$ ist und die über L reduzibel sind.

13. Entscheide, ob man den Winkel $\arccos(11/16)$ mit Zirkel und Lineal dritteln kann.

14. Sei R ein faktorieller Ring und I das von einer Teilmenge $A \subset R$ erzeugte Ideal. Was kann man sagen über die Menge aller Hauptideale, die I enthalten?

15. Für welche Ringe R ist der Polynomring $R[X]$ ein Hauptidealring?

16. Sei K ein Körper. Zeige, dass es unendliche viele irreduzible normierte Polynome in $K[X]$ gibt.

*17. Sei $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ der Ring aller holomorphen Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(a) Welche Beziehung besteht zwischen $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ und dem Ring $\mathcal{O}_p$ der Keime holomorpher Funktionen in einem Punkt $p \in \mathbb{C}$ aus Aufgabe 7 von Serie 12?
(b) Zeige, dass $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ ein Integritätsbereich ist.

(c) Bestimme die Einheitengruppe von $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

(d) Bestimme alle irreduziblen Elemente von $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

(e) Beweise, dass alle diese schon Primelemente sind.

(f) Zeige, dass $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ nicht faktoriell ist.

(g) Ist $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ noethersch? (Siehe Satz 4.4.3 der Vorlesung.)

(h) Beschreibe den Quotientenkörper von $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit Hilfe von meromorphen Funktionen. (*Hinweis*: Weierstrass'scher Produktsatz.)

18. Zerlege für beliebige ganze Zahlen $m, n \geqslant 1$ das Polynom $X^m - Y^n \in \mathbb{C}[X, Y]$ in irreduzible Faktoren.

*19. Sei R ein faktorieller Ring. In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass jeder Polynomring in endlich vielen Variablen über R ebenfalls faktoriell ist. Gilt dies auch für einen Polynomring in einer beliebig grossen unendlichen Menge von Variablen?

20. Bestimme welche der folgenden Polynome irreduzibel sind.

(a) $X^3 + 9X + 6X - 3 \in \mathbb{Z}[X]$.

(b) $4X^3 - 15X^2 + 60X + 180 \in \mathbb{Q}[X]$.

(c) $X^3 + 3X^2 + 5X + 5 \in \mathbb{Q}[X]$

(d) $X^7 + 7X^6 + 5X^2 - X + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

(e) $X^4 - X^2 - 2X + 3 \in \mathbb{Z}[X]$.

(f) $X^7 - X^6 + X^5 + 16X^4 + 17X^3 + 6X + 17 \in \mathbb{Z}[X]$.