D-MATH | Algebra I | HS 2022

Prof. Richard Pink

Serie 1

Gruppen, Untergruppen

1. In welchen der folgenden Fälle ist $(G, *)$ eine Gruppe?

   (a) $G := \mathbb{R}$ mit $x * y := x + y - xy$.

   (b) $G := \mathbb{R}^3$ mit dem Kreuzprodukt $x * y := x \times y$.

   (c) G das offene Intervall $(-1, 1)$ mit $x * y := \frac{x+y}{1+xy}$.

2. Entscheide, für welche Werte $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Verknüpfung $x * y := ax + by + c$ eine Gruppenstruktur auf $\mathbb{R}$ definiert.

3. Sudoku für Mathematiker: Vervollständige die Verknüpfungstafel auf der Menge $G := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ beziehungsweise $G := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, so dass $(G, \circ)$ eine Gruppe ist. Welches Element ist jeweils das Einselement? Ist die Gruppe kommutativ?

$\circ$	1	2	3	4	5	6
1	2					
2						
3					4	
4	5			6		
5		5				3
6			5			

$\circ$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	9						3		
2			4						
3									
4	1								
5						4			
6			9						
7					2				5
8						3			
9	4								

*4. Zeige, dass auf jeder nicht-leeren Menge eine Gruppenstruktur definiert werden kann.
Hinweis: Es darf ohne Beweis benutzt werden, dass jede unendliche Menge gleich mächtig ist wie die Menge ihrer endlichen Teilmengen.

**5. Sei G eine Menge mit einer assoziativen binären Operation $\circ\colon G \times G \to G$ und einem *linksneutralen* Element $e \in G$, so dass jedes Element $a \in G$ ein *Rechtsinverses* besitzt, das heisst, ein Element $a' \in G$ mit $a \circ a' = e$. Ist $(G, \circ, e)$ dann immer eine Gruppe?

6. Sei G eine Gruppe. Zeige:

   (a) Eine Teilmenge $U \subset G$ ist eine Untergruppe genau dann, wenn sie nichtleer ist und $UU^{-1} \subset U$ gilt.

   (b) Eine endliche Teilmenge $U \subset G$ ist eine Untergruppe genau dann, wenn sie nichtleer ist und $UU \subset U$ gilt.

   (c) Für Untergruppen U und V ist UV genau dann eine Untergruppe von G, wenn $UV = VU$ gilt.

   (d) Für Untergruppen U und V ist $U \cup V$ genau dann eine Untergruppe von G, wenn $U < V$ oder $V < U$ gilt.

7. Sei G eine Gruppe und n die Anzahl ihrer Untergruppen. Zeige:

   (a) Es ist $n = 1$ genau dann, wenn $G \cong \{1\}$ ist.

   (b) Es ist $n = 2$ genau dann, wenn $G \cong C_p$ ist für eine Primzahl p.

   (c) Es ist $n = 3$ genau dann, wenn $G \cong C_{p^2}$ ist für eine Primzahl p.