Serie 10

Körpererweiterungen, Minimalpolynom, Algebraische Erweiterungen

1. Zeige: Für jede Körpererweiterung L/K sind äquivalent:

   (a) $[L/K] = 2$.

   (b) Es existiert $a \in L \smallsetminus K$ mit $L = K(a)$ sowie $a^2 \in K$ oder $a^2 + a \in K$.

2. Seien K_1 und K_2 Zwischenkörper der endlichen Körpererweiterung L/K. Zeige: Sind $[K_1/K]$ und $[K_2/K]$ teilerfremd, dann sind K_1 und K_2 linear disjunkt über K.

**3. Seien K_1 und K_2 Zwischenkörper einer Körpererweiterung L/K. Gilt die Ungleichung $[K_1K_2/K_2] \leqslant [K_1/K]$ allgemein im Sinne von Kardinalzahlen?

*4. Seien K_1 und K_2 Zwischenkörper einer Körpererweiterung L/K. Betrachte den K-Vektorraum $R := K_1 \otimes_K K_2$. Zeige:

   (a) Es existiert genau eine K-bilineare Multiplikation $R \times R \to R$ mit $(x_1 \otimes x_2) \cdot (y_1 \otimes y_2) = x_1y_1 \otimes x_2y_2$ für alle $x_1, y_1 \in K_1$ und $x_2, y_2 \in K_2$. Diese macht R zu einem kommutativen unitären Ring.

   (b) Es existiert genau einen Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to L$ mit $\varphi(x_1 \otimes x_2) = x_1x_2$ für alle $x_1 \in K_1$ und $x_2 \in K_2$. Sein Bild ist der von $K_1 \cup K_2$ über K erzeugte Unterring von L.

   (c) Sei nun L/K endlich und $L = K_1K_2$. Dann ist φ ein Isomorphismus genau dann, wenn K_1 und K_2 linear disjunkt über K sind.

5. Ist die Körpererweiterung $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$ einfach?
   (Sie dürfen ein Computeralgebrasystem benutzen)

6. Bestimme die Minimalpolynome der folgenden komplexen Zahlen über $\mathbb{Q}$:

   (a) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

   (b) $\sqrt{3} - \sqrt[3]{3}$.

   (c) $\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{5}\, i$.

   (*Hinweis:* Es gibt verschiedene Lösungswege. In (a) kann man durch direkten Ansatz zeigen, dass $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist. In (b) kann man analog $\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ zeigen oder Aufgabe 2 benutzen. In jedem der Fälle kann man zeigen, dass das gefundene Polynom irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist, indem man alle möglichen Faktorisierungen über $\mathbb{C}$ daraufhin testet, ob die Faktoren Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ haben.)

7. Für $\alpha := \sqrt{-3+\sqrt{12}}$ sei bekannt, dass $[\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}] = 4$ ist. Stelle die folgenden Zahlen als Polynom in α von möglichst kleinem Grad dar:

   (a) $(\alpha^3 + 1)(\alpha^3 - \alpha + 4)$.

   (b) $\frac{1}{\alpha^2+\alpha+1}$.

8. Sei L/K eine Körpererweiterung und seien $\alpha, \beta \in L$. Zeige, dass α und β genau dann algebraisch über K sind, wenn $\alpha + \beta$ und $\alpha \cdot \beta$ algebraisch über K sind.

9. Zeige, dass für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$ die Zahlen $\cos(\alpha\pi)$ und $\sin(\alpha\pi)$ algebraisch sind.