Musterlösung Serie 10

Körpererweiterungen, Minimalpolynom, Algebraische Erweiterungen

1. Zeige: Für jede Körpererweiterung L/K sind äquivalent:

   (a) $[L/K] = 2$.

   (b) Es existiert $a \in L \smallsetminus K$ mit $L = K(a)$ sowie $a^2 \in K$ oder $a^2 + a \in K$.

   Lösung: (a)⇒(b): Wegen $\dim_K(L) = [L/K] = 2$ existiert ein Element $b \in L \smallsetminus K$. Dieses ist dann linear unabhängig von $1 \in K$, also bilden 1 und b eine Basis von L über K. Daher existieren $\alpha, \beta \in K$ mit $b^2 = \alpha b + \beta$.

   Im Fall $\alpha = 0$ ist dann $b^2 = \beta \in K$ und die gesuchte Aussage gilt mit $a := b$. Im Fall $\alpha \neq 0$ lässt sich die Gleichung $b^2 = \alpha b + \beta$ umformen zu $\frac{b^2}{\alpha^2} - \frac{b}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha^2}$. Mit $a := -\frac{b}{\alpha}$ gilt dann $a^2 + a = \frac{\beta}{\alpha^2} \in K$. Da $\frac{a}{b} \in K^\times$ ist, folgt $K(a) = K(b) = L$.

   (b)⇒(a): Wegen $a \notin K$ ist $[L/K] = [K(a)/K] > 1$. Andererseits gibt es nach Voraussetzung ein Polynom $f \in K[X]$ der Form $X^2 - b$ oder $X^2 + X - b$ mit $f(a) = 0$. Das Minimalpolynom von a über K ist dann ein Teiler von f. Sein Grad ist daher $\leqslant 2$ und ausserdem gleich $[K(a)/K]$. Somit folgt $[L/K] = 2$.

2. Seien K_1 und K_2 Zwischenkörper der endlichen Körpererweiterung L/K. Zeige: Sind $[K_1/K]$ und $[K_2/K]$ teilerfremd, dann sind K_1 und K_2 linear disjunkt über K.

   Lösung: Aus der Vorlesung wissen wir, dass $[K_1K_2/K] \leqslant [K_1/K][K_2/K]$ ist. Umgekehrt folgt aus $[K_1K_2/K] = [K_1K_2/K_2] \cdot [K_2/K]$, dass $[K_2/K]$ ein Teiler von $[K_1K_2/K]$ ist. Analog ist $[K_1/K]$ ein Teiler von $[K_1K_2/K]$. Aus der Teilerfremdheit folgt nun, dass $[K_1/K] \cdot [K_2/K]$ den Grad $[K_1K_2/K]$ teilt, und deshalb $[K_1K_2/K] \geqslant [K_1/K] \cdot [K_2/K]$ ist. Insgesamt folgt daraus $[K_1K_2/K] = [K_1/K][K_2/K]$, und damit sind K_1 und K_2 linear disjunkt über K.

**3. Seien K_1 und K_2 Zwischenkörper einer Körpererweiterung L/K. Gilt die Ungleichung $[K_1K_2/K_2] \leqslant [K_1/K]$ allgemein im Sinne von Kardinalzahlen?

   Lösung: Im Allgemeinen nicht. Für ein Beispiel sei $L := \mathbb{C}(X)$ der rationale Funktionenkörper in einer Variablen über $K_2 := \mathbb{C}$, und betrachte die Unterkörper $K_1 := \mathbb{Q}(X)$ und $K := \mathbb{Q}$. Dann gilt $K_1K_2 = L$.

   Für alle komplexen Zahlen α sind die rationalen Funktionen $\frac{1}{X-\alpha} \in L$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$, zum Beispiel wegen der eindeutigen Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion. Daher ist $[K_1K_2/K_2] = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(X)$ mindestens die Kardinalität von $\mathbb{C}$. (Dieser Grad ist in der Tat gleich der Kardinalität des Kontinuums.)

Andererseits ist jedes Element von $\mathbb{Q}(X)$ gleich f/g für $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ mit $g \neq 0$. Da sowohl $\mathbb{Q}$ als auch $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[X]$ abzählbar sind, ist auch $\mathbb{Q}[X]$ abzählbar. Somit gibt es nur abzählbar viele Möglichkeiten für f und g, und folglich ist $\mathbb{Q}(X)$ und daher auch $[K_1/K] = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(X)$ abzählbar.

*4. Seien K_1 und K_2 Zwischenkörper einer Körpererweiterung L/K. Betrachte den K-Vektorraum $R := K_1 \otimes_K K_2$. Zeige:

(a) Es existiert genau eine K-bilineare Multiplikation $R \times R \to R$ mit $(x_1 \otimes x_2) \cdot (y_1 \otimes y_2) = x_1y_1 \otimes x_2y_2$ für alle $x_1, y_1 \in K_1$ und $x_2, y_2 \in K_2$. Diese macht R zu einem kommutativen unitären Ring.

(b) Es existiert genau einen Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to L$ mit $\varphi(x_1 \otimes x_2) = x_1x_2$ für alle $x_1 \in K_1$ und $x_2 \in K_2$. Sein Bild ist der von $K_1 \cup K_2$ über K erzeugte Unterring von L.

(c) Sei nun L/K endlich und $L = K_1K_2$. Dann ist φ ein Isomorphismus genau dann, wenn K_1 und K_2 linear disjunkt über K sind.

Lösung: (Skizze) (a) Für jedes $x_1 \in K_1$ und $x_2 \in K_2$ ist die Abbildung

$$K_1 \times K_2 \to K_1 \otimes K_2,\ (y_1, y_2) \mapsto x_1y_1 \otimes x_2y_2$$

K-bilinear, induziert daher nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts eine eindeutige K-lineare Abbildung $m_{x_1,x_2}\colon K_1 \otimes K_2 \to K_1 \otimes K_2$ mit der Eigenschaft $m_{x_1,x_2}(y_1 \otimes y_2) = x_1y_1 \otimes x_2y_2$ für alle $y_1 \in K_1$ und $y_2 \in K_2$. Für jedes $t \in K_1 \otimes K_2$ rechnet man nun nach, dass die Abbildung

$$K_1 \times K_2 \to K_1 \otimes K_2,\ (x_1, x_2) \mapsto m_{x_1,x_2}(t)$$

ebenfalls K-bilinear ist, indem man $t = \sum_i y_{1i} \otimes y_{2i}$ schreibt und ausmultipliziert und die Bilinearität des Tensorprodukts benutzt. Nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts existiert daher eine eindeutige K-lineare Abbildung $n_t\colon K_1 \otimes K_2 \to K_1 \otimes K_2$ mit der Eigenschaft $n_t(x_1 \otimes x_2) = m_{x_1,x_2}(t)$ für alle $x_1 \in K_1$ und $x_2 \in K_2$. Insgesamt erhalten wir damit eine Abbildung

$$(K_1 \otimes_K K_2) \times (K_1 \otimes_K K_2) \to K_1 \otimes_K K_2$$

mit $(x_1 \otimes x_2) \cdot (y_1 \otimes y_2) = x_1y_1 \otimes x_2y_2$ für alle $x_1, y_1 \in K_1$ und $x_2, y_2 \in K_2$. Diese ist nach Konstruktion bereits K-linear in der zweiten Variablen, und eine weitere Rechnung zeigt, dass sie auch in der ersten Variablen K-linear ist. Die Ringaxiome verifiziert man ebenfalls durch einige direkte Rechnungen.

(b) Die Abbildung

$$K_1 \times K_2 \to L,\ (x_1, x_2) \mapsto x_1x_2$$

ist K-bilinear, induziert daher nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts eine eindeutige K-lineare Abbildung $\varphi\colon K_1 \otimes K_2 \to L$ mit der Eigenschaft

$\varphi(x_1 \otimes x_2) = x_1x_2$ für alle $x_1 \in K_1$ und $x_2 \in K_2$. Durch direkte Rechnungen zeigt man, dass φ ein Ringhomomorphismus ist. Sein Bild besteht nach Konstruktion aus allen Elementen von L der Form $\sum_i y_{1i}y_{2i}$ mit $y_{1i} \in K_1$ und $y_{2i} \in K_2$, ist also genau der von K_1 und K_2 erzeugte Unterring von L.

(c) Nach Konstruktion ist $\varphi\colon K_1 \otimes_K K_2 \to K_1K_2$ in diesem Fall surjektiv, also gilt

$$[K_1K_2/K] \leqslant \dim_K(K_1 \otimes_K K_2) = \dim_K(K_1) \cdot \dim_K(K_2) = [K_1/K] \cdot [K_2/K] < \infty.$$

Daher ist φ ein Isomorphismus genau dann, wenn diese Ungleichung eine Gleichung ist, was nach Definition bedeutet, dass K_1 und K_2 linear disjunkt über K sind.

5. Ist die Körpererweiterung $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$ einfach?
(Sie dürfen ein Computeralgebrasystem benutzen)

Lösung: Wir probieren es mit $a := \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ und berechnen sukzessive

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}, \\ a^3 &= 26\sqrt{2} + 24\sqrt{3} + 20\sqrt{5} + 6\sqrt{30}, \\ a^5 &= 784\sqrt{2} + 664\sqrt{3} + 520\sqrt{5} + 200\sqrt{30}, \\ a^7 &= 23024\sqrt{2} + 18976\sqrt{3} + 14720\sqrt{5} + 5936\sqrt{30}. \end{aligned}$$

In Matrixform bedeutet dies

$$\begin{pmatrix} a \\ a^3 \\ a^5 \\ a^7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 26 & 24 & 20 & 6 \\ 784 & 664 & 520 & 200 \\ 23024 & 18976 & 14720 & 5936 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{5} \\ \sqrt{30} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat Determinante -36864 und ist daher invertierbar über $\mathbb{Q}$. Also lassen sich $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{30}$ als $\mathbb{Q}$-Linearkombinationen von a, a^3, a^5, a^7 ausdrücken. Insbesondere gilt daher $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}) \subset \mathbb{Q}(a) \subset K$ und daher $K = \mathbb{Q}(a)$. Somit ist $K/\mathbb{Q}$ einfach.

6. Bestimme die Minimalpolynome der folgenden komplexen Zahlen über $\mathbb{Q}$:

   (a) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

   (b) $\sqrt{3} - \sqrt[3]{3}$.

   (c) $\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{5}\,i$.

(*Hinweis:* Es gibt verschiedene Lösungswege. In (a) kann man durch direkten Ansatz zeigen, dass $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist. In (b) kann man analog $\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ zeigen oder Aufgabe 2 benutzen. In jedem der Fälle kann man zeigen, dass das gefundene Polynom irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist, indem man alle möglichen Faktorisierungen über $\mathbb{C}$ daraufhin testet, ob die Faktoren Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ haben.)

Lösung:

(a) Setze $\alpha := \sqrt{2} + \sqrt{5}$. Dann gilt $\alpha^2 = 7 + 2\sqrt{10}$ und weiter $\alpha^4 - 14\alpha^2 + 49 = (\alpha^2 - 7)^2 = (2\sqrt{10})^2 = 40$. Daher ist α Nullstelle des normierten Polynoms $f(X) := X^4 - 14X^2 + 9 \in \mathbb{Q}[X]$. Sobald wir wissen, dass f irreduzibel ist, ist es also das gesuchte Minimalpolynom.

Da wir dies nicht direkt sehen können, argumentieren wir indirekt. Zuerst berechnen wir $\alpha^3 = 17\sqrt{2} + 11\sqrt{5}$. Durch Vergleich mit $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ sehen wir, dass wir $\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$ als $\mathbb{Q}$-Linearkombinationen von α und α^3 darstellen können. Somit gilt $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) \subset \mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ und daher $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$. Der Grad des Minimalpolynoms von α über $\mathbb{Q}$ ist nun aber gleich $[\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}]$. Es genügt daher, die Gleichung $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}] = 4$ zu zeigen.

Dafür beachten wir, dass $\sqrt{2}$ Nullstelle des quadratischen Polynoms $X^2 - 2$ ist und nicht schon in $\mathbb{Q}$ liegt; somit ist $[\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}] = 2$. Analog sieht man $[\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}] = 2$. Ist $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, so existiert eine Darstellung $\sqrt{5} = a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $5 = (a + b\sqrt{2})^2 = a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2$. Aber 1 und $\sqrt{2}$ sind $\mathbb{Q}$-linear unabhängig, durch Koeffizientenvergleich folgt daraus also $5 = a^2 + 2b^2$ und $0 = 2ab$. Daher ist entweder $a = 0$ und $5 = 2b^2$, oder $b = 0$ und $5 = a^2$. Da aber 5 und $5/2$ keine Quadrate in $\mathbb{Q}$ sind, erhalten wir einen Widerspruch. Somit ist $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und damit $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})] > 1$. Aus der Vorlesung wissen wir andererseits $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})] \leqslant [\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}] = 2$. Zusammen folgt daraus $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 2$ und damit $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}] = 4$.

Aliter: Das Polynom f hat die vier Nullstellen $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{5}$ mit unabhängigen Vorzeichen. Wäre eine von diesen schon in $\mathbb{Q}$, so wäre auch $(\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{5})^2 = 2 \pm 2\sqrt{10} + 5 \in \mathbb{Q}$, was aber wegen $\sqrt{10} \notin \mathbb{Q}$ falsch ist. Somit ist die einzige Möglichkeit, dass f reduzibel ist, dass es in zwei quadratische Faktoren über $\mathbb{Q}$ zerfällt. Dann ist $(X-\alpha)(X-\beta) \in \mathbb{Q}[X]$ für eine der übrigen Nullstellen β. Durch direkte Rechnung sieht man aber in jedem der Fälle, dass mindestens eine der Zahlen $\alpha+\beta$ bzw. $\alpha\beta$ nicht in $\mathbb{Q}$ liegt. Somit muss f irreduzibel sein.

(b) Setze $\alpha := \sqrt{3} - \sqrt[3]{3}$. Dann ist

$$-3 \;=\; (-\sqrt[3]{3})^3 \;=\; (\alpha - \sqrt{3})^3 \;=\; \alpha^3 - 3\sqrt{3}\alpha^2 + 9\alpha - 3\sqrt{3}$$

und damit

$$\alpha^3 + 9\alpha + 3 \;=\; \sqrt{3} \cdot (3\alpha^2 + 3). \tag{$*$}$$

Durch Quadrieren liefert dies

$$\begin{aligned} \alpha^6 + 81\alpha^2 + 9 + 18\alpha^4 + 6\alpha^3 + 54\alpha &= 27(\alpha^4 + 2\alpha^2 + 1) \iff \\ \alpha^6 - 9\alpha^4 + 6\alpha^3 + 27\alpha^2 + 54\alpha - 18 &= 0. \end{aligned}$$

Somit ist α Nullstelle des normierten Polynoms

$$f(X) \;:=\; X^6 - 9X^4 + 6X^3 + 27X^2 + 54X - 18 \;\in\; \mathbb{Q}[X].$$

Sobald wir wissen, dass f irreduzibel ist, ist es also das gesuchte Minimalpolynom.

Hierfür beachten wir, dass die rechte Seite von $(*)$ positiv und daher nicht Null ist. Somit liegt $\sqrt{3}$ in dem Körper $\mathbb{Q}(\alpha)$, und daher tut das auch $\sqrt[3]{3} = \sqrt{3} - \alpha$. Also gilt $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{3}) \subset \mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{3})$ und daher $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{3})$. Der Grad des Minimalpolynoms von α über $\mathbb{Q}$ ist aber gleich $[\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}]$. Es genügt daher, zu zeigen, dass $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{3})/\mathbb{Q}] = 6$ ist.

Nun ist $\sqrt{3}$ Nullstelle des quadratischen Polynoms $X^2 - 3$ und liegt nicht schon in $\mathbb{Q}$; somit ist $[\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}] = 2$. Analog ist $\sqrt[3]{3}$ Nullstelle des Polynoms $X^3 - 3$. Da dieses keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$ besitzt, ist es schon irreduzibel und folglich $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})/\mathbb{Q}] = 3$. Mit Aufgabe 2 folgt daraus $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{3})/\mathbb{Q}] = 6$, und wir sind fertig.

(c) Sei $\alpha := \sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{5}i$. Dann gilt $\alpha^4 = 5 \cdot (1+i)^4 = -20$. Daher ist α Nullstelle des normierten Polynoms $f(X) := X^4 + 20$. Sobald wir wissen, dass f irreduzibel ist, ist es also das gesuchte Minimalpolynom.

Aus der Multiplikativität der komplexen Betragsfunktion folgt, dass alle Nullstellen von f den Betrag $\sqrt{2}\sqrt[4]{5}$ haben. Dieser ist nicht in $\mathbb{Q}$ enthalten, da sonst auch $(\sqrt{2}\sqrt[4]{5})^2/2 = \sqrt{5}$ rational wäre. Da der Betrag jeder rationalen Zahl rational ist, liegt daher keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$. Somit ist die einzige Möglichkeit, dass f reduzibel ist, dass es in zwei quadratische Faktoren über $\mathbb{Q}$ zerfällt. In diesem Fall ist $(X - \alpha)(X - \beta) \in \mathbb{Q}[X]$ für eine der übrigen Nullstellen β. Der Betrag von $\alpha\beta$ ist dann aber $2\sqrt{5}$, also ist $\alpha\beta \notin \mathbb{Q}$ und wir erhalten einen Widerspruch. Somit muss f irreduzibel sein.

7. Für $\alpha := \sqrt{-3 + \sqrt{12}}$ sei bekannt, dass $[\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}] = 4$ ist. Stelle die folgenden Zahlen als Polynom in α von möglichst kleinem Grad dar:

(a) $(\alpha^3 + 1)(\alpha^3 - \alpha + 4)$.

(b) $\frac{1}{\alpha^2 + \alpha + 1}$.

Lösung: Wir bestimmen zunächst das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$. Quadrieren ergibt $\alpha^2 = -3 + \sqrt{12}$ und $\alpha^4 + 6\alpha^2 + 9 = (\alpha^2 + 3)^2 = 12$. Also ist α Nullstelle des normierten Polynoms $f(X) := X^4 + 6X^2 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$. Darum ist f ein Vielfaches des Minimalpolynoms von α über $\mathbb{Q}$. Der Grad dieses Minimalpolynoms ist nun aber gleich $[\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}] = 4$, also gleich dem Grad von f. Somit ist dieses Minimalpolynom gleich f.

(a) Ausmultiplizieren und Polynomdivision durch f mit Rest ergibt

$$\begin{aligned}(X^3 + 1)(X^3 - X + 4) &= X^6 - X^4 + 5X^3 - X + 4 \\ &= (X^2 - 7)(X^4 + 6X^2 - 3) + (5X^3 + 45X^2 - X - 17).\end{aligned}$$

Einsetzen von $X = \alpha$ in diese Gleichung liefert daher

$$\begin{aligned}(\alpha^3+1)(\alpha^3-\alpha+4) &= (\alpha^2-7)(\alpha^4+6\alpha^2-3)+(5\alpha^3+45\alpha^2-\alpha-17)\\ &= 5\alpha^3+45\alpha^2-\alpha-17.\end{aligned}$$

(b) Wir suchen Polynome $u, v \in \mathbb{Q}[X]$ mit

$$u(X)\cdot(X^2+X+1)+v(X)\cdot(X^4+6X^2-3)=1.$$

Einsetzen von $X = \alpha$ liefert dann

$$u(\alpha)\cdot(\alpha^2+\alpha+1) \;=\; u(\alpha)\cdot(\alpha^2+\alpha+1)+v(\alpha)\cdot(\alpha^4+6\alpha^2-3) \;=\; 1;$$

Das gesuchte Inverse ist also $u(\alpha)$. Wir wenden den erweiterten Euklidischen Algorithmus an und erhalten durch Division mit Rest

$$X^4+6X^2-3 = \big(X^2-X+6\big)\big(X^2+X+1\big)+(-5X-9)$$

und

$$X^2+X+1 = \left(-\frac{1}{5}X+\frac{4}{25}\right)(-5X-9)+\frac{61}{25}.$$

Rückwärtseinsetzen liefert

$$u(X) = \frac{1}{61}\big(-5X^3+9X^2-34X+49\big) \quad \text{und} \quad v(X) = \frac{1}{61}(5X-4).$$

Also ist

$$\frac{1}{\alpha^2+\alpha+1} = \frac{1}{61}\big(-5\alpha^3+9\alpha^2-34\alpha+49\big).$$

8. Sei L/K eine Körpererweiterung und seien $\alpha, \beta \in L$. Zeige, dass α und β genau dann algebraisch über K sind, wenn $\alpha+\beta$ und $\alpha\cdot\beta$ algebraisch über K sind.

   Lösung: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Summe und das Produkt zweier über K algebraischer Elemente ebenfalls algebraisch über K sind.

   Nehmen wir umgekehrt an, dass $\alpha+\beta$ und $\alpha\cdot\beta$ algebraisch über K sind. Dann ist $K' = K(\alpha+\beta, \alpha\cdot\beta)$ eine algebraische Körpererweiterung von K. Ausserdem ist $f(X) := X^2-(\alpha+\beta)X+\alpha\cdot\beta$ ein von Null verschiedenes Polynom in $K'[X]$ mit $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Somit sind α und β algebraisch über K'. Da K'/K eine algebraische Körpererweiterung ist, sind α und β dann auch algebraisch über K, wie zu zeigen war.

9. Zeige, dass für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$ die Zahlen $\cos(\alpha\pi)$ und $\sin(\alpha\pi)$ algebraisch sind.

   Lösung: Schreibe $\alpha = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q > 0$. Dann gilt $(e^{\pm i\alpha\pi})^{2q} = e^{\pm 2ip\pi} = 1$. Also ist $e^{\pm i\alpha\pi}$ algebraisch. Als $\mathbb{Q}$-Linearkombination algebraischer Zahlen ist daher auch $\cos(\alpha\pi) = \frac{1}{2}(e^{i\alpha\pi}+e^{-i\alpha\pi})$ algebraisch. Da i algebraisch ist, folgt dasselbe für $\sin(\alpha\pi) = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha\pi}-e^{-i\alpha\pi})$.