

Serie 11

ALGEBRAISCHE KÖRPERERWEITERUNGEN, KONSTRUKTIONEN MIT ZIRKEL UND LINEAL

1. Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und p eine Primzahl. Zeige:
 - (a) Für alle $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ mit $m < n$ ist $(\sqrt[m]{p})^m \notin \mathbb{Q}$.
 - (b) Das Polynom $X^n - p$ ist irreduzibel über \mathbb{Q} .
 - (c) Die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{p})/\mathbb{Q}$ hat Grad n .
 - (d) Für jedes $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ bestimme das Minimalpolynom von $\sqrt[m]{p}$ über $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{p})$.
 - (e) Es existiert ein unendlicher Körperturm der Form $\dots/K_i/\dots/K_1/K_0 = \mathbb{Q}$ mit $[K_i/K_{i-1}] = 2$ für alle $i \geq 1$.
 - (f) Es existiert eine algebraische Körpererweiterung K/\mathbb{Q} , die nicht endlich ist.
2. Zeige, dass ein reguläres Pentagon mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist,
 - (a) abstrakt mit Hilfe von Körpertheorie;
 - (b) durch Angabe einer expliziten Konstruktion.
3. Ausserirdische, die im \mathbb{R}^n leben, haben dich gebeten, den n -Würfel mit Zirkel und Lineal zu verdoppeln. Für welche Werte von n kannst du das erreichen?
4. Sei p eine ungerade Primzahl. Zeige:
 - (a) Für $\zeta := e^{2\pi i/p}$ gilt $[\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}] = p - 1$.
 - (b) Ist ein regelmässiges p -Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar, so ist p eine *Fermat-Primzahl*, das heisst, $p = 2^{2^k} + 1$ für ein $k \geq 0$.
 - (c) Die p -Teilung eines allgemeinen Winkels mit Zirkel und Lineal ist nicht möglich.

Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass das *zyklotomische Polynom* $\Phi_p(X) := X^{p-1} + \dots + X + 1$ sowie das Polynom $\Phi_p(X^p)$ über \mathbb{Q} irreduzibel ist.