Serie 12

Teilbarkeit, Faktorielle Ringe, Hauptidealringe

1. Sei K ein Körper. Zeige, dass $K[X^2, X^3] \subset K[X]$ ein Integritätsbereich, aber nicht faktoriell ist.

2. Sei R ein faktorieller Ring.

   (a) Seien $a, b, c \in R$. Zeige:
   $$c|ab,\ \operatorname{ggT}(a,c) \sim 1 \Longrightarrow c|b.$$

   (b) Sei $u \in R^\times$, und seien $p_1, \ldots, p_n$ Primelemente von R. Zeige, dass die Teiler von $up_1 \cdots p_n$ genau die Elemente der Form $v \cdot \prod_{i\in I} p_i$ sind für alle $v \in R^\times$ und alle Teilmengen $I \subset \{1, \ldots, n\}$.

3. Betrachte Elemente $a_1, \ldots, a_n$ eines faktoriellen Rings R. Ein Element $b \in R$ mit $\forall i\colon a_i|b$ heisst *gemeinsames Vielfaches von* $a_1, \ldots, a_n$.

   (a) Zeige, dass ein gemeinsames Vielfaches b von $a_1, \ldots, a_n$ existiert, so dass für jedes gemeinsame Vielfache b' von $a_1, \ldots, a_n$ gilt $b|b'$.

   (b) Zeige, dass dieses *kleinste gemeinsame Vielfache von* $a_1, \ldots, a_n$ eindeutig bis auf Assoziiertheit ist. Wir bezeichnen jedes solche mit $\operatorname{kgV}(a_1, \ldots, a_n)$.

   (c) Zeige, dass $\operatorname{ggT}(a_1, a_2) \cdot \operatorname{kgV}(a_1, a_2) \sim a_1 \cdot a_2$ gilt.

4. Seien a and b positive ganze Zahlen. Beweise unter Verwendung der Isomorphiesätze die Identität
   $$\operatorname{ggT}(a,b) \cdot \operatorname{kgV}(a,b) = ab.$$

5. Sei R ein Hauptidealring. Zeige, dass jedes von Null verschiedene Primideal in R maximal ist.

6. Im Ring $R := \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] \subset \mathbb{C}$ gilt die Gleichheit

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5}).$$

Zeige:

(a) Die Funktion $N\colon R \to \mathbb{Z}^{\geqslant 0}, z = a + bi\sqrt{5} \mapsto |z|^2 = a^2 + 5b^2$ ist multiplikativ (das heisst, $\forall \alpha, \beta \in R : N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$).

(b) $R^\times = \{u \in R \mid N(u) = 1\} = \{\pm 1\}$.

(c) Die Elemente $2, 3, 1 + i\sqrt{5}, 1 - i\sqrt{5}$ sind unzerlegbar in R.

(d) Die Elemente $2, 3, 1 + i\sqrt{5}, 1 - i\sqrt{5}$ sind keine Primelemente in R.

(e) Für das Ideal $I = (2, 1 + i\sqrt{5})$ gilt $I \cdot I = (2)$.

(f) I ist kein Hauptideal von R.

(g) I ist ein maximales Ideal von R.

(h) R ist nicht faktoriell.

*7. Für $p \in \mathbb{C}$ sei $\mathcal{S}_p$ die Menge aller Paare (U, f) bestehend aus einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ von p und einer holomorphen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$. Zwei solche Paare (U_1, f_1) und (U_2, f_2) nennen wir äquivalent, falls eine Umgebung $V \subset U_1 \cap U_2$ von p existiert mit $f_1|_V = f_2|_V$. Dies ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{S}_p$, und wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen mit $\mathcal{O}_p$. Die Elemente von $\mathcal{O}_p$ heissen *Keime holomorpher Funktionen in p.*

(a) Zeige, dass die Addition und Multiplikation von holomorphen Funktionen eine Ringstruktur auf $\mathcal{O}_p$ induzieren.

(b) Entscheide, ob $\mathcal{O}_p$ ein Hauptidealring ist.