Serie 2

Ordnung, Homo-, Iso-, Automorphismen

1. Bestimme die Ordnungen der folgenden Gruppenelemente:

   (a) Von i und $e^{i\sqrt{3}\pi}$ und $e^{\frac{2\pi i}{17}}$ in der Gruppe $\mathbb{C}^\times$.

   (b) Von $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, AB und $C = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ in der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

   (c) Von 1, 2, 3 in der Gruppe $\mathbb{F}_{17}^\times$.

*2. Zeige, dass für jede natürliche Zahl $m \geqslant 3$ eine endliche Gruppe vom Exponenten m existiert, die nicht abelsch ist.

   Hinweis: Untersuche Diedergruppen und Gruppen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} < \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).$$

3. (a) Seien G und H endliche Gruppen von teilerfremder Ordnung. Zeige, dass jeder Homomorphismus $\varphi : G \to H$ trivial ist, also $\varphi(x) = 1_H$ für alle $x \in G$.

   (b) Sei G eine Gruppe, und seien H und H' endliche Untergruppen von teilerfremder Ordnung. Zeige, dass $H \cap H' = \{1_G\}$ gilt.

4. Seien G eine endliche Gruppe der Ordnung n und X eine beliebige Menge der Kardinalität n. Zeige:

   (a) Für jede Bijektion $\varphi\colon X \to G$ existiert genau eine Gruppenstruktur auf X, so dass φ ein Isomorphismus wird.

   (b) Zwei Bijektionen $\varphi, \psi\colon X \to G$ liefern dieselbe Gruppenstruktur auf X genau dann, wenn die Bijektion $\gamma := \psi \circ \varphi^{-1}\colon G \to G$ ein Automorphismus ist.

   (c) Die Anzahl der Gruppenstrukturen auf X, für die X isomorph zu G wird, ist $n!/|\operatorname{Aut}(G)|$.

5. Die *Quaternionengruppe* ist die Untergruppe $Q := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ der multiplikativen Gruppe der Hamiltonschen Quaternionen $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \oplus j\mathbb{R} \oplus k\mathbb{R}$.

   (a) Bestimme alle Untergruppen von Q.

   (b) Zeige: Alle Untergruppen sind normal, aber Q ist nicht abelsch.

Die restlichen Aufgaben befassen sich mit unendlichen abelschen Gruppen, welche eine interessante innere Struktur besitzen können.

6. Elemente $g_1, \ldots, g_r$ einer additiv geschriebenen abelschen Gruppe G heissen $\mathbb{Z}$-*linear unabhängig*, wenn für alle $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$n_1 g_1 + \ldots + n_r g_r = 0 \implies n_1 = \ldots = n_r = 0.$$

   Der *Rang von G* ist das Supremum der Menge aller natürlichen Zahlen r, für die $\mathbb{Z}$-linear unabhängige Elemente $g_1, \ldots, g_r \in G$ existieren.

   (a) Zeige, dass der Rang invariant unter Isomorphie ist.

   (b) Betrachte eine natürliche Zahl n und eine Untergruppe G der additiven Gruppe $\mathbb{Q}^{\oplus n}$ mit $\mathbb{Z}^{\oplus n} \subset G$. Bestimme den Rang von G.

7. Betrachte eine Primzahl p und die folgenden additiven Untergruppen von $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[\tfrac{1}{p}] &:= \big\{ \tfrac{m}{p^i} \,\big|\, m \in \mathbb{Z},\ i \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0} \big\}, \\ \mathbb{Z}_{(p)} &:= \big\{ \tfrac{m}{n} \,\big|\, m, n \in \mathbb{Z},\ p \nmid n \big\}. \end{aligned}$$

   Sei G eine der Gruppen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$, $\mathbb{Z}_{(p)}$, $\mathbb{Q}$ oder die direkte Summe von zweien davon.

   (a) Bestimme für jede Primzahl q die Untergruppe $\mathrm{Div}_q(G) := \bigcap_{r \geqslant 0} q^r G$.

   (b) Entscheide, welche der fraglichen Gruppen G zueinander isomorph sind.

**8. Sei p eine Primzahl. Für jedes $n \geqslant 0$ setze $\omega_n := \sum_{m=0}^{n} p^{m!}$. Betrachte die Menge

$$G := \big\{ (a, b) \in \mathbb{Q}^{\oplus 2} \,\big|\, \exists\, n_0 \geqslant 0\ \forall\, n \geqslant n_0\colon\ a - b \cdot \omega_n \in \mathbb{Z}_{(p)} \big\}.$$

   (a) Zeige, dass G eine Untergruppe der additiven Gruppe $\mathbb{Q}^{\oplus 2}$ ist.

   (b) Zeige: Es existiert kein $x \in \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft

$$\forall\, r \geqslant 0\ \exists\, n_0 \geqslant 0\ \forall\, n \geqslant n_0\colon\ x - \omega_n \in p^r \mathbb{Z}_{(p)}.$$

   (c) Zeige $\mathrm{Div}_p(G) = 0$ und $\mathrm{Div}_q(G) = G$ für jede Primzahl $q \neq p$.

   (d) Zeige $[\mathbb{Z}_{(p)} : p\mathbb{Z}_{(p)}] = p$ und $[G : pG] = p$.

   (e) Folgere: Die Gruppe G ist isomorph zu keiner der Gruppen in Aufgabe 7.