Serie 3

Normalteiler, Faktorgruppen, Operationen

1. (a) Zeige: Ist ein Normalteiler N einer Gruppe G im Zentrum von G enthalten und G/N zyklisch, so ist G abelsch.

   (b) Zeige, dass jede Gruppe der Ordnung 4 abelsch ist.

*2. Sei p eine Primzahl.

   (a) Sei G eine endliche Gruppe, so dass p der kleinste Primteiler von $|G|$ ist. Zeige, dass jede Untergruppe $H < G$ vom Index p ein Normalteiler ist.

   (b) Folgere, dass jede Gruppe G der Ordnung p^2 abelsch ist.

   Hinweis: Für (a) bestimme Kern und Bild des Homomorphismus $G \to S_p$, welcher der Operation von G auf der Menge der Linksnebenklassen G/H entspricht. Für (b) untersuche die Operation von G durch Konjugation auf $H \setminus \{1\}$.

3. Zeige für jede Gruppe G:

   (a) Jede Untergruppe von G, welche die Kommutatorgruppe $[G,G]$ enthält, ist normal. Insbesondere ist $[G,G]$ normal.

   (b) Für jeden Normalteiler $N \lhd G$ gilt

   $$[G,G] < N \iff G/N \text{ ist abelsch.}$$

   (c) Für jede abelsche Gruppe A und jeden Homomorphismus $\varphi : G \to A$ existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\overline{\varphi} : G/[G,G] \to A$, sodass $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$ ist, wobei $\pi : G \to G/[G,G]$ die kanonische Projektion bezeichnet.

   Bemerkung: Die Faktorgruppe $G/[G,G]$ heisst *Abelisierung* von G, und die genannte Aussage heisst die *universelle Eigenschaft der Abelisierung.*

   (d) Berechne $[G,G]$ und $G/[G,G]$ für $G = D_n$ und alle $n \in \mathbb{Z}^{>0}$.

4. Welche Aussage folgt, wenn man den Homomorphiesatz auf die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$ anwendet?

5. Die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}^\times$ der reellen Zahlen operiert auf $\mathbb{R}^2$ vermöge $t(x,y) = (tx, y/t)$. Bestimme die Bahnen und Stabilisatoren dieser Operation.

**6. In einem zweidimensionalen Universum $\mathbb{R}^2$ sei im Ursprung eine Punktmasse (die Sonne) fixiert. Die Bewegung einer zweiten Punktmasse (eines Planeten) folge dem Newtonschen Gravitationsgesetz. Dies bedeutet eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung bezüglich des Zeitparameters t.

   (a) Für welche Anfangswerte $(x_0, \dot{x}_0)$ existiert eine für alle $t \in \mathbb{R}$ definierte Lösung $(x(t), \dot{x}(t))$?

   (b) Auf welchem Bereich in $\mathbb{R}^4$ definiert die induzierte Abbildung $(t, (x_0, \dot{x}_0)) \mapsto (x(t), \dot{x}(t))$ eine Operation von $(\mathbb{R}, +)$?

   (c) Klassifiziere die Bahnen (!) und Stabilisatoren dieser Operation.

7. Jede Linksoperation einer Gruppe G auf einer Menge X induziert eine Linksoperation auf der Menge

$$\big\{(x_1, \ldots, x_m) \in X^m \;\big|\; \forall i \neq j\colon\;\; x_i \neq x_j\big\}$$

durch $g(x_1, \ldots, x_m) := (gx_1, \ldots, gx_m)$. Ist diese transitiv, so heisst die ursprüngliche Operation *m-fach transitiv*. Ist diese transitiv und frei, so heisst die ursprüngliche Operation *scharf m-fach transitiv*. Beispiel: Die natürliche Operation der symmetrischen Gruppe S_n auf $\{1, \ldots, n\}$ ist m-fach transitiv für jedes $m \leqslant n$, und scharf n-fach transitiv.

Sei jetzt K ein Körper und $\mathbb{P}^1(K)$ die Menge aller eindimensionalen K-Untervektorräume von K^2. Die natürliche Operation von $\mathrm{GL}_2(K)$ auf $\mathbb{P}^1(K)$ faktorisiert durch eine Operation von $\mathrm{PGL}_2(K) := \mathrm{GL}_2(K)/(K^\times \cdot I_2)$. Zeige: Die Operation von $\mathrm{PGL}_2(K)$ auf $\mathbb{P}^1(K)$ ist scharf dreifach transitiv.

8. Sei G eine Gruppe und sei $H < G$ eine Untergruppe von endlichem Index. Zeige, dass ein in H enthaltener Normalteiler $N \lhd G$ von endlichem Index existiert.

Hinweis: Finde einen Homomorphismus $G \to S_n$, dessen Kern in H enthalten ist.