D-MATH Algebra I HS 2022
Prof. Richard Pink

Musterlösung Serie 3

NORMALTEILER, FAKTORGRUPPEN, OPERATIONEN

1. (a) Zeige: Ist ein Normalteiler N einer Gruppe G im Zentrum von G enthalten und G/N zyklisch, so ist G abelsch.

   (b) Zeige, dass jede Gruppe der Ordnung 4 abelsch ist.

   Lösung: (a) Wähle $x \in G$, so dass G/N von der Nebenklasse xN erzeugt ist. Für jedes Element g von G gibt es dann eine ganze Zahl n mit $gN = x^n N$, also insbesondere mit $g \in x^n N$. Daher erzeugen N und x die ganze Gruppe G. Da sowohl N (als Teilmenge des Zentrums von G) als auch x im Zentralisator $\mathrm{Cent}_G(x)$ von x liegen und dieser eine Untergruppe ist, folgt deshalb $\mathrm{Cent}_G(x) = G$. Dies ist äquivalent dazu, dass x im Zentrum von G liegt. Das Zentrum enthält aber auch N, also auch die von N und x erzeugte Untergruppe. Somit ist es ebenfalls gleich ganz G. Daher ist G abelsch.

   Variante: Für $x \in G$ und beliebige Elemente $g, h \in G$ gibt es ganze Zahlen m und n mit $gN = x^m N$ und $hN = x^n N$. Daher existieren a, $b \in N$ mit $g = x^m a$ und $h = x^n b$. Da a und b in N und folglich im Zentrum von G liegen, folgt

   $$gh = x^m a x^n b = x^m x^n ab = x^n x^m ba = x^n b x^m a = hg.$$

   Somit ist G abelsch.

   (b) Ist $|G| = 4$, so hat jedes Element von G die Ordnung 1, 2, oder 4 nach Lagrange. Gibt es ein Element g der Ordnung 4, so ist $G = \langle g \rangle$ zyklisch und daher abelsch. Wähle andernfalls ein beliebiges Element $g \in G$ der Ordnung 2. Dann ist die Untergruppe $\langle g \rangle$ vom Index 2 und daher normal. Für jedes $h \in G$ gilt daher $\langle {}^h g \rangle = {}^h\langle g \rangle = \langle g \rangle$. Wegen $g \neq 1$ ist aber auch ${}^h g \neq 1$ und somit kann nur ${}^h g = g$ sein. Also gilt $hg = gh$ und G is abelsch.

*2. Sei p eine Primzahl.

   (a) Sei G eine endliche Gruppe, so dass p der kleinste Primteiler von $|G|$ ist. Zeige, dass jede Untergruppe $H < G$ vom Index p ein Normalteiler ist.

   (b) Folgere, dass jede Gruppe G der Ordnung p^2 abelsch ist.

   Hinweis: Für (a) bestimme Kern und Bild des Homomorphismus $G \to S_p$, welcher der Operation von G auf der Menge der Linksnebenklassen G/H entspricht. Für (b) untersuche die Operation von G durch Konjugation auf $H \smallsetminus \{1\}$.

   Lösung:

(a) Die Gruppe G operiert auf der Menge der Linksnebenklassen G/H vermöge $g(xH) := (gx)H$. Diese Linksoperation entspricht einem Homomorphismus $\varphi\colon G \to S_p$. Betrachte den Normalteiler $K := \mathrm{Kern}(\varphi)$.

Der Stabilisator der Nebenklasse H bezüglich dieser Operation ist gleich H, denn es gilt $gH = H \Leftrightarrow g \in H$. Daher gilt $K < H$ und

$$[G : K] = [G : H] \cdot [H : K] \geqslant p. \tag{1}$$

Andererseits induziert φ nach dem Homomorphiesatz einen injektiven Homomorphimus $G/K \hookrightarrow S_p$. Deshalb ist $[G : K] = |G/K| = |\,\mathrm{Bild}(\varphi)|$ ein Teiler von $|S_p| = p!$. Nach dem Satz von Lagrange ist $[G : K]$ aber auch ein Teiler von $|G|$. Die Voraussetzungen an p implizieren nun, dass der grösste gemeinsame Teiler von $p!$ und $|G|$ gleich p ist. Somit ist $[G : K]$ ein Teiler von p. Wegen (**??**) bleibt dann nur noch die Möglichkeit $[G : K] = p$. Es ist also $[G : K] = p = [G : H]$ und deshalb $[H : K] = 1$ nach (**??**). Darum gilt $H = K$, also ist H normal.

(b) Sei G eine Gruppe der Ordnung p^2. Nach Lagrange hat dann jedes von 1 verschiedene Element von G die Ordnung p oder p^2. Gibt es ein Element g der Ordnung p^2, so ist $G = \langle g \rangle$ zyklisch und daher abelsch. Andernfalls wählen wir ein beliebiges Element $g \in G$ der Ordnung p. Dann ist $H := \langle g \rangle$ eine Untergruppe vom Index $p^2/p = p$; nach (a) ist sie daher normal.

Für alle $g \in G$ gilt nun ${}^gH = H$ und ${}^g1 = 1$. Daher haben wir eine wohldefinierte Abbildung

$$G \times (H \smallsetminus \{0\}) \longrightarrow H \smallsetminus \{0\}, \quad (g, h) \mapsto {}^gh.$$

Als Einschränkung der Konjugationsoperation von G auf sich ist diese wieder eine Linksoperation. Durch Nummerieren der Elemente von $H \smallsetminus \{0\}$ entspricht diese Operation einem Homomorphismus $\varphi\colon G \to S_{p-1}$. Da die Ordnungen $|G| = p^2$ und $|S_{p-1}| = (p-1)!$ teilerfremd sind, ist dieser Homomorphismus trivial nach Aufgabe 3 (a) von Serie 2. Für alle $h \in H$ und alle $g \in G$ gilt somit ${}^gh = h$; also folgt $H < Z(G)$.

Schliesslich ist G/H eine Gruppe der Ordnung $p^2/p = p$ und daher zyklisch. Da der Normalteiler H im Zentrum von G enthalten ist, folgt aus Aufgabe 1 (a), dass G abelsch ist.

3. Zeige für jede Gruppe G:

(a) Jede Untergruppe von G, welche die Kommutatorgruppe $[G, G]$ enthält, ist normal. Insbesondere ist $[G, G]$ normal.

(b) Für jeden Normalteiler $N \lhd G$ gilt

$$[G, G] < N \Longleftrightarrow G/N \text{ ist abelsch.}$$

(c) Für jede abelsche Gruppe A und jeden Homomorphismus $\varphi : G \to A$ existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\overline{\varphi} : G/[G,G] \to A$, sodass $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$ ist, wobei $\pi : G \to G/[G,G]$ die kanonische Projektion bezeichnet.

Bemerkung: Die Faktorgruppe $G/[G,G]$ heisst *Abelisierung* von G, und die genannte Aussage heisst die *universelle Eigenschaft der Abelisierung.*

(d) Berechne $[G,G]$ und $G/[G,G]$ für $G = D_n$ und alle $n \in \mathbb{Z}^{>0}$.

Lösung:

(a) Sei $H < G$ eine Untergruppe mit $[G,G] < H$ und seien $g \in G$ und $h \in H$ beliebig. Dann ist

$$ghg^{-1} = (ghg^{-1})(h^{-1}h) = \underbrace{(ghg^{-1}h^{-1})}_{\in[G,G]<H} h \in H.$$

Also gilt $gHg^{-1} < H$ für alle $g \in G$, und somit ist H ein Normalteiler.

(b) Sei $N \lhd G$ ein Normalteiler. Der Kommutator zweier Elemente aN, bN der Faktorgruppe G/N ist gleich

$$[aN, bN] = (aN)(bN)(aN)^{-1}(bN)^{-1} = aba^{-1}b^{-1}N = [a,b]N.$$

Die Elemente aN und bN kommutieren also genau dann, wenn $[aN,bN] = [a,b]N$ trivial in G/N ist. Dies ist äquivalent zu $[a,b] \in N$. Daher ist G/N genau dann abelsch, wenn die Kommutatoren $[a,b]$ für alle $a,b \in G$ in N liegen. Da $[G,G]$ von den Kommutatoren erzeugt ist, ist dies genau dann der Fall, wenn $[G,G] < N$ ist.

(c) Für alle $g,h \in G$ ist $\varphi([g,h]) = [\varphi(g), \varphi(h)] = 1_A$, da A abelsch ist. Da der Kern von φ eine Untergruppe ist, folgt also $[G,G] < \operatorname{Kern}\varphi$. Die Behauptung folgt aus der universellen Eigenschaft der Faktorgruppe.

(d) Schreibe $D_n = \{1, T, \ldots, T^{n-1}, S, ST, \ldots, ST^{n-1}\}$ für eine Spiegelung S und eine Drehung T der Ordnung n. Dann gilt $ST = T^{-1}S$ und folglich

$$[S,T] = STS^{-1}T^{-1} = T^{-1}SS^{-1}T^{-1} = T^{-1}T^{-1} = T^{-2}.$$

Daher liegt T^{-2} in der Kommutatorgruppe $[D_n, D_n]$.

Ist n ungerade, so folgt $Z_n = \langle T \rangle = \langle T^{-2} \rangle < [D_n, D_n]$. Aber Z_n ist eine Untergruppe vom Index 2 in D_n; folglich ist sie normal und die Faktorgruppe D_n/Z_n hat Ordnung 2. Als solche ist sie zyklisch und deshalb abelsch. Nach (b) gilt daher $[D_n, D_n] < Z_n$. Insgesamt folgt somit $[D_n, D_n] = Z_n = \langle T \rangle$ und $D_n/[D_n, D_n] \cong Z_2$ in diesem Fall.

Ist n gerade, so folgt $\langle T^2 \rangle = \langle T^{-2} \rangle < [D_n, D_n]$. Wegen

$$\begin{aligned} T\langle T^2 \rangle T^{-1} &= \langle TT^2T^{-1} \rangle = \langle T^2 \rangle \qquad \text{und} \\ S\langle T^2 \rangle S^{-1} &= \langle ST^2S^{-1} \rangle = \langle T^{-2} \rangle = \langle T^2 \rangle \end{aligned}$$

enthält ihr Normalisator die Elemente S und T und daher ganz $D_n = \langle S, T \rangle$; also ist sie normal in D_n. Ihre Faktorgruppe hat Ordnung $|D_n|/|\langle T^2 \rangle| = 2n/\frac{n}{2} = 4$. Nach Aufgabe 1 (b) ist sie daher abelsch. Nach (b) gilt deshalb $[D_n, D_n] < \langle T^2 \rangle$. Insgesamt folgt somit $[D_n, D_n] = \langle T^2 \rangle$ in diesem Fall. Ausserdem besitzt die Faktorgruppe die zwei verschiedenen Elemente $T\langle T^2 \rangle$ und $S\langle T^2 \rangle$ der Ordnung 2; daher kann $D_n/[D_n, D_n]$ nur isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sein.

Aliter: Mittels $ST^k = T^{-k}S$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ berechnen wir alle Kommutatoren in D_n mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned} [T^i, T^j] &= 1, \\ [T^i, ST^j] &= T^{2i}, \\ [ST^i, T^j] &= T^{-2j}, \\ [ST^i, ST^j] &= T^{2j-2i} \end{aligned}$$

für alle $i, j \in \mathbb{Z}$. Die Menge der Kommutatoren ist also $\{T^{2k} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \langle T^2 \rangle$ und bereits eine Untergruppe von D_n. Also ist $[D_n, D_n] = \langle T^2 \rangle$. Rest wie oben.

4. Welche Aussage folgt, wenn man den Homomorphiesatz auf die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$, $x \mapsto e^{2\pi ix}$ anwendet?

   Lösung: Aus der Analysis wissen wir, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Gleichung $e^{2\pi i(x+y)} = e^{2\pi ix}e^{2\pi iy}$ gilt. Also ist f ein Homomorphismus von der additiven Gruppe $\mathbb{R}$ in die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}^\times$. Ebenfalls aus der Analysis wissen wir, dass $\mathrm{Kern}(f) = \mathbb{Z}$ und $\mathrm{Bild}(f) = S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ sind. Nach dem Homomorphiesatz induziert f damit einen Isomorphismus der Faktorgruppe $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ auf die Untergruppe $S^1 < \mathbb{C}^\times$.

5. Die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}^\times$ der reellen Zahlen operiert auf $\mathbb{R}^2$ vermöge $t(x, y) = (tx, y/t)$. Bestimme die Bahnen und Stabilisatoren dieser Operation.

   Lösung: Die Bahn eines Elements $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ ist die Menge

   $$\mathbb{R}^\times(a,\, b) = \{(ta,\, b/t) \,:\, t \in \mathbb{R}^\times\}.$$

   Es gibt damit folgende Bahnen:

   - $a, b \neq 0$: Hyperbeln $xy = ab$, denn jeder Punkt einer solchen Hyperbel erfüllt $x = ta,\ y = b/t$ mit $t = b/y = x/a \neq 0$.
   - $a = 0,\ b \neq 0$: y-Achse ohne Ursprung.
   - $b = 0,\ a \neq 0$: x-Achse ohne Ursprung.
   - $(a, b) = (0, 0)$: Ursprung.

   Der Stabilisator von $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ist die Menge aller $t \in \mathbb{R}^\times$ mit $ta = a,\ b/t = b$. Diese ist $\{1\}$ für $(a, b) \neq (0, 0)$ und $\mathbb{R}^\times$ für $(a, b) = (0, 0)$.

**6. In einem zweidimensionalen Universum $\mathbb{R}^2$ sei im Ursprung eine Punktmasse (die Sonne) fixiert. Die Bewegung einer zweiten Punktmasse (eines Planeten) folge dem Newtonschen Gravitationsgesetz. Dies bedeutet eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung bezüglich des Zeitparameters t.

(a) Für welche Anfangswerte $(x_0, \dot{x}_0)$ existiert eine für alle $t \in \mathbb{R}$ definierte Lösung $(x(t), \dot{x}(t))$?

(b) Auf welchem Bereich in $\mathbb{R}^4$ definiert die induzierte Abbildung $(t, (x_0, \dot{x}_0)) \mapsto (x(t), \dot{x}(t))$ eine Operation von $(\mathbb{R}, +)$?

(c) Klassifiziere die Bahnen (!) und Stabilisatoren dieser Operation.

7. Jede Linksoperation einer Gruppe G auf einer Menge X induziert eine Linksoperation auf der Menge

$$\big\{(x_1, \ldots, x_m) \in X^m \;\big|\; \forall i \neq j\colon\ x_i \neq x_j\big\}$$

durch $g(x_1, \ldots, x_m) := (gx_1, \ldots, gx_m)$. Ist diese transitiv, so heisst die ursprüngliche Operation *m-fach transitiv*. Ist diese transitiv und frei, so heisst die ursprüngliche Operation *scharf m-fach transitiv*. Beispiel: Die natürliche Operation der symmetrischen Gruppe S_n auf $\{1, \ldots, n\}$ ist m-fach transitiv für jedes $m \leqslant n$, und scharf n-fach transitiv.

Sei jetzt K ein Körper und $\mathbb{P}^1(K)$ die Menge aller eindimensionalen K-Untervektorräume von K^2. Die natürliche Operation von $\mathrm{GL}_2(K)$ auf $\mathbb{P}^1(K)$ faktorisiert durch eine Operation von $\mathrm{PGL}_2(K) := \mathrm{GL}_2(K)/(K^\times \cdot I_2)$. Zeige: Die Operation von $\mathrm{PGL}_2(K)$ auf $\mathbb{P}^1(K)$ ist scharf dreifach transitiv.

Lösung: We first consider the action of $\mathrm{GL}_2(K)$. Consider any triple of distinct 1-dimensional subspaces (Kv_1, Kv_2, Kv_3). Then any two of v_1, v_2, v_3 are linearly independent. Thus (v_1, v_2) is a basis of K^2, and hence $v_3 = x_1v_1 + x_2v_2$ for some $x_1, x_2 \in K$. Since v_3 is linearly independent of each of v_1, v_2, we have $x_1, x_2 \neq 0$. After replacing v_1 by x_1v_1 and v_2 by x_2v_2, which does not change the subspaces Kv_1 and Kv_2, we can thus assume that $v_1 + v_2 = v_3$. Consider the matrix $g \in \mathrm{GL}_2(K)$ with $g\binom{1}{0} = v_1$ and $g\binom{0}{1} = v_2$. Then $g\binom{1}{1} = v_1 + v_2 = v_3$, and hence

$$\big(Kg\tbinom{1}{0}, Kg\tbinom{0}{1}, Kg\tbinom{1}{1}\big) \;=\; (Kv_1, Kv_2, Kv_3).$$

Thus every triple lies in the orbit of the triple $\big(K\binom{1}{0}, K\binom{0}{1}, K\binom{1}{1}\big)$, and so the action is transitive.

Next, an element $g \in \mathrm{GL}_2(K)$ stabilizes the triple $\big(K\binom{1}{0}, K\binom{0}{1}, K\binom{1}{1}\big)$ if and only if $g\binom{1}{0} \in K\binom{1}{0}$ and $g\binom{0}{1} \in K\binom{0}{1}$ and $g\binom{1}{1} \in K\binom{1}{1}$. The first two conditions mean that g must be a diagonal matrix. Knowing this, the last condition means that the diagonal entries must coincide. Thus g must be a scalar matrix. Conversely, any scalar matrix stabilizes every 1-dimensional subspace. Thus the stabilizer of the given triple is the subgroup of scalar matrices $K^\times \cdot I_2$.

Writing any triple (Kv_1, Kv_2, Kv_3) in the form $\bigl(Kg'\binom{1}{0}, Kg'\binom{0}{1}, Kg'\binom{1}{1}\bigr)$ for some $g' \in \mathrm{GL}_2(K)$, we deduce that the stabilizer of any triple is ${}^{g'}(K^\times \cdot I_2) = K^\times \cdot I_2$.

Now observe that for any 1-dimensional subspace $V \subset K^2$ and any $g \in \mathrm{GL}_2(K)$, the image gV depends only on the coset $g \cdot K^\times \cdot I_2$, that is, on the image of g in $\mathrm{PGL}_2(K)$. Direct calculation shows that this induces an action of $\mathrm{PGL}_2(K)$. By the above results, the induced action on the set of triples is transitive and has point stabilizer $(K^\times \cdot I_2)/(K^\times \cdot I_2)$, the trivial subgroup. Thus this induced action is transitive and free. Therefore the action of $\mathrm{PGL}_2(K)$ on $\mathbb{P}^1(K)$ is simply 3-transitive (scharf dreifach transitiv).

8. Sei G eine Gruppe und sei $H < G$ eine Untergruppe von endlichem Index. Zeige, dass ein in H enthaltener Normalteiler $N \lhd G$ von endlichem Index existiert.

   Hinweis: Finde einen Homomorphismus $G \to S_n$, dessen Kern in H enthalten ist.

   Lösung: Betrachte die Linksoperation von G auf der Menge der Nebenklassen G/H durch $(g, xH) \mapsto gxH$. Durch Nummerieren der Nebenklassen entspricht diese Operation einem Homomorphismus $\varphi\colon G \to S_n$ für $n := [G : H]$. Setze $N := \mathrm{Kern}(\varphi)$. Jedes Element $g \in N$ hält dann jede Ziffer fest, also auch jede Nebenklasse. Insbesondere gilt $g \cdot H = H$, also $g \in H$, und somit $N < H$. Andererseits gilt $G/N \cong \mathrm{Bild}(\varphi)$, also $[G : N] = |\,\mathrm{Bild}(\varphi)| \leqslant |S_n| = n!$. Also ist $N \lhd G$ ein in H enthaltener Normalteiler von endlichem Index.