D-MATH | Algebra I | HS 2022
Prof. Richard Pink

Serie 4

Symmetrische Gruppe

1. Konstruiere für jedes $n \geqslant 1$ einen injektiven Homomorphismus $S_n \hookrightarrow A_{n+2}$.

2. (a) Bestimme für jedes n das Zentrum der symmetrischen Gruppe S_n.
   (b) Berechne den Zentralisator von $(2\ 3\ 4)$ in S_5.
   (c) Berechne den Zentralisator von $(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)$ in S_7.

*3. (a) Für alle n und k bestimme die durchschnittliche Anzahl von Bahnen der Länge k eines Elements von S_n, wobei jedes Element von S_n als gleich wahrscheinlich betrachtet wird. Kontrolliere, dass das Resultat kompatibel mit der Gesamtzahl n der Ziffern ist.
   (b) Bestimme die durchschnittliche Anzahl der Bahnen eines Elements von S_n, und deren asymptotisches Verhalten für $n \to \infty$.
   (c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass zwei zufällige Elemente von S_n miteinander kommutieren, und deren asymptotisches Verhalten für $n \to \infty$. (Für letzteres Literatursuche.)

4. Sei K ein endlicher Körper der Ordnung q. Betrachte die Operation von $\mathrm{PGL}_2(K)$ auf $\mathbb{P}^1(K)$ wie in Aufgabe 7 der Serie 3. Durch Nummerieren der Elemente von $\mathbb{P}^1(K)$ entspricht diese einem Homomorphismus $\mathrm{PGL}_2(K) \to S_{q+1}$. Bestimme dessen Bild für alle $q \leqslant 4$.

5. Sei p eine Primzahl und sei $H < S_p$ eine Untergruppe, die einen p-Zykel und eine Transposition enthält. Zeige, dass $H = S_p$ gilt.

6. Beim *Schiebespiel* oder *15-Puzzle* sind in der Anfangsposition 15 nummerierte Steine in aufsteigender Reihenfolge in einem 4×4-Rahmen angeordnet, und das Feld unten rechts ist frei:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Ein Zug besteht darin, einen horizontal oder vertikal angrenzenden Stein auf das leere Feld zu schieben. Wir nennen eine Position *zulässig*, wenn sie mit einer endlichen Folge von Zügen aus der Anfangsposition erreicht werden kann und das Feld unten rechts leer ist.

(a) Zeige, dass die Gruppe A_{15} frei und transitiv auf der Menge der zulässigen Positionen operiert.

(b) Folgere daraus, dass es keine Folge von Zügen gibt, welche die Position

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

in die Anfangsposition überführt.

*7. (a) Zeige, dass jede Untergruppe vom Index 5 von A_5 zu A_4 konjugiert ist.

(b) Folgere daraus, dass $\mathrm{Aut}(A_5) \cong S_5$ ist.