D-MATH
Prof. Richard Pink

Algebra I

HS 2022

Serie 5

Freie Gruppen, Erzeugende und Relationen

1. Untersuche, welche der folgenden durch Erzeugende und Relationen gegebenen Gruppen endlich sind, und mache für diese eine Liste aller Elemente.
   (a) $G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = [a, b]^n = 1\rangle$ für $n \geqslant 1$
   (b) $G = \langle x, y \mid x^3 = y^2,\ x^2 = y^3\rangle$
   (c) $G = \langle x, y \mid x^8 = y^2 = yxyx^5 = 1\rangle$
   (d) $G = \langle x, y \mid x^3 = y^2 = 1\rangle$
   *(e) $G = \langle x, y \mid xy^2 = y^3x,\ yx^2 = x^3y\rangle$
2. Zeige, dass $F_n * F_m \cong F_{n+m}$ gilt.
3. (a) Zeige, dass die Abelisierung $F_n/[F_n, F_n]$ von F_n isomorph zu $\mathbb{Z}^n$ ist.
   (b) Folgere daraus, dass $F_n \cong F_m$ genau dann gilt, wenn $n = m$ ist.

*4. Zeige, dass für jedes $n \geqslant 1$ eine Einbettung $F_n \hookrightarrow F_2$ existiert.

5. Ist jede endliche Gruppe isomorph zu einem Quotienten einer endlich erzeugten freien Gruppe mit endlich vielen Relationen?