Musterlösung Serie 5

Freie Gruppen, Erzeugende und Relationen

1. Untersuche, welche der folgenden durch Erzeugende und Relationen gegebenen Gruppen endlich sind, und mache für diese eine Liste aller Elemente.

   (a) $G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = [a,b]^n = 1\rangle$ für $n \geqslant 1$

   (b) $G = \langle x, y \mid x^3 = y^2,\ x^2 = y^3\rangle$

   (c) $G = \langle x, y \mid x^8 = y^2 = yxyx^5 = 1\rangle$

   (d) $G = \langle x, y \mid x^3 = y^2 = 1\rangle$

   *(e) $G = \langle x, y \mid xy^2 = y^3x,\ yx^2 = x^3y\rangle$

   Lösung:

   (a) Aus $a^2 = b^2 = 1$ folgt $a^{-1} = a$ und $b^{-1} = b$ und daraus $[a,b] = aba^{-1}b^{-1} = abab = (ab)^2$. Die Gleichung $[a,b]^2 = 1$ ist daher äquivalent zu $(ab)^{2n} = 1$. Mit $c := ab$ ist dann $b = a^{-1}c$ und die Gleichung $b^2 = 1$ äquivalent zu $a^{-1}ca^{-1}c = 1$, und wegen $a^{-1} = a$ auch zu $aca^{-1} = c^{-1}$. Somit ist

   $$G \;\cong\; \big\langle a, c \;\big|\; a^2 = c^{2n} = 1,\ aca^{-1} = c^{-1}\big\rangle.$$

   Dies ist die Präsentation der Diedergruppe D_{2n} der Ordnung $4n$; somit ist $G \cong D_{2n}$. Die Elemente sind also c^i und ac^i für $0 \leqslant i < 2n$.

   (b) Aus den gegebenen Relationen folgt

   $$x^2 = y^3 = y^2y = x^3y$$

   und daraus durch Multiplikation mit x^{-3} von links $x^{-1} = y$. Darum ist G von x erzeugt und zyklisch. Zudem ergibt sich

   $$x^5 = x^2x^3 = y^{-2}y^2 = 1.$$

   Somit ist G endlich und G hat höchstens die 5 Elemente 1, x, x^2, x^3, x^4. Durch $x \mapsto 1$ und $y \mapsto -1$ wird ein Homomorphismus $G \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ definiert, denn 1 und -1 genügen in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ denselben Relationen wie x und y in G:

   $$\begin{aligned} 3 \cdot 1 &= 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 &= 3 \cdot (-1) \end{aligned}$$

   Dieser Homorphismus ist surjektiv, da 1 ganz $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ erzeugt. Daher müssen 1, x, x^2, x^3, x^4 paarweise verschieden sein und es gilt

   $$G \;=\; \{1,\, x,\, x^2,\, x^3,\, x^4\} \;\cong\; \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}.$$

(c) Wegen $x^8 = 1$ und $y^2 = 1$ haben x und y endliche Ordnung und insbesondere können x^{-1} und y^{-1} als $x^{-1} = x^7$ und $y^{-1} = y$ dargestellt werden. Deshalb kann jedes Element von G als Wort in x und y geschrieben werden. Wegen $x^8 = 1$ ist die von x erzeugte Untergruppe $\langle x \rangle$ ein Quotient von $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Aus den gegebenen Relationen folgt

$$yxy^{-1} = yxy = x^{-5} = x^3,$$

daher gilt $y\langle x \rangle y^{-1} = \langle x^3 \rangle$. Wegen $(x^3)^3 = x^9 = x$ ist $\langle x^3 \rangle$ gleich $\langle x \rangle$ und somit liegt y im Normalisator von $\langle x \rangle$. Aber auch x liegt im Normalisator von $\langle x \rangle$, daher ist dieser gleich ganz G und $\langle x \rangle$ ist normal in G. Da G von x und y erzeugt wird und die Nebenklasse von x in $G/\langle x \rangle$ trivial ist, ist die Faktorgruppe $G/\langle x \rangle$ erzeugt von $y\langle x \rangle$ und ein Quotient von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, da $y^2 = 1$ ist. Somit kann jedes Element von G als x^i oder $x^i y$ mit $0 \leqslant i < 8$ dargestellt werden.

Wir müssen nun noch zeigen, dass diese 16 Elemente paarweise verschieden sind. Dafür konstruieren wir einen Homomorphismus wie folgt: Betrachte die Einheitswurzel $\zeta := e^{2\pi i/8}$ und die Matrizen

$$T := \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für diese gilt $T^8 = S^2 = STST^5 = 1$. Daher existiert ein Homomorphismus $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ mit $\varphi(x) = T$ und $\varphi(y) = S$. Da die Elemente $\varphi(x^i) = T^i$ und $\varphi(x^i y) = T^i S$ für alle $0 \leqslant i < 8$ paarweise verschieden sind, sind auch die x^i und $x^i y$ paarweise verschieden, was zu zeigen war.

(d) Wir betrachten die Matrizengruppe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ mit den Elementen $[A]$ und $[B]$ für die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Diese erfüllen $[A]^3 = 1$ und $[B]^2 = 1$ in $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Daher wird durch $x \mapsto [A]$ und $y \mapsto [B]$ ein Homomorphismus $\varphi\colon G \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ definiert. Dieser bildet yx auf das Element

$$[B][A] = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

ab. Für alle $n > 0$ ist nun

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^n = \left[\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \neq 1$$

in $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$, also hat $[B][A]$ unendliche Ordnung. Somit hat auch $\mathrm{Bild}(\varphi)$ unendliche Ordnung und insbesondere ist G unendlich.

Bemerkung: Es lässt sich sogar zeigen, dass φ ein Isomorphismus von G nach $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ ist.

Variante: Die Gruppe G lässt sich durch

$$x \mapsto \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \; y \mapsto \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

auf eine unendliche Untergruppe von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ abbilden. Unter diesem Homomorphismus wird nämlich yxy^{-1} auf

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

und somit $yxy^{-1}x$ auf

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

abgebildet, was ein Element unendlicher Ordnung ist. Daraus folgt auch, dass G unendlich ist.

(e) Wegen $yx^2 = x^3y$ ist $y = x^3yx^{-2}$. Einsetzen in $xy^2 = y^3x$ ergibt

$$x^4yxyx^{-2} = x(x^3yx^{-2})^2 = (x^3yx^{-2})^3x = x^3yxyxyx^{-1},$$

also nach Multiplizieren mit x^{-3} von links und x^2 von rechts

$$(xy)^2 = (yx)^3.$$

Da die definierenden Relationen von G symmetrisch in x und y sind, folgt auch

$$(yx)^2 = (xy)^3.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt wie bei (a)

$$xy = (yx)^{-1} = x^{-1}y^{-1},$$

was äquivalent zu $x^2 = y^{-2}$ ist. Daraus folgt weiter

$$y^{-1} = yy^{-2} = yx^2 = x^3y = xx^2y = xy^{-2}y = xy^{-1},$$

also $x = 1$. Schliesslich folgt $y^2 = xy^2 = y^3x = y^3$ und somit auch $y = 1$. Die Gruppe G ist also trivial.

2. Zeige, dass $F_n * F_m \cong F_{n+m}$ gilt.

   Lösung: Sei F_n zusammen mit $i_1 : X \to F_n$ die freie Gruppe über $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ und F_m zusammen mit $i_2 : Y \to F_m$ die freie Gruppe über $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$. Zudem seien $j_1 \colon F_n \to F_n * F_m$ und $j_2 \colon F_m \to F_n * F_m$ die kanonischen Homomorphismen. Definiere nun Z als die disjunkte Vereinigung $X \sqcup Y$ von X und Y und i als die eindeutige Abbildung $Z \to F_n * F_m$ mit $i|_X = j_1 \circ i_1$ und $i|_Y = j_2 \circ i_2$. Wir haben somit folgendes kommutatives Diagramm, in dem die vertikalen Abbildungen die Inklusionen von X und Y in $Z = X \sqcup Y$ sind:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_1"] \arrow[d] & F_n \arrow[dr, "j_1"] & \\
Z \arrow[rr, "i"] & & F_n * F_m \\
Y \arrow[r, "i_2"] \arrow[u] & F_m \arrow[ur, "j_2"] &
\end{tikzcd}$$

   Es genügt zu zeigen, dass $F_n * F_m$ zusammen mit $i : Z \to F_n * F_m$ die universelle Eigenschaft der freien Gruppe über Z erfüllt. Sei dafür G eine beliebige Gruppe und $f : Z \to G$ eine beliebige Abbildung. Dann gibt es nach der universellen Eigenschaft der freien Gruppen F_n und F_m Homomorphismen $\varphi_1 \colon F_n \to G$ und $\varphi_2 \colon F_m \to G$ mit $f|_X = \varphi_1 \circ i_1$ und $f|_Y = \varphi_2 \circ i_2$. Diese definieren nach der universellen Eigenschaft des freien Produkts $F_n * F_m$ einen Homomorphismus $\varphi \colon F_n * F_m \to G$ mit $\varphi_1 = \varphi \circ j_1$ und $\varphi_2 = \varphi \circ j_2$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\varphi \circ i|_X &= \varphi \circ j_1 \circ i_1 = \varphi_1 \circ i_1 = f|_X, \\
\varphi \circ i|_Y &= \varphi \circ j_2 \circ i_2 = \varphi_2 \circ i_2 = f|_Y,
\end{aligned}$$

   also $\varphi \circ i = f$.

   Ist $\varphi' : F_n * F_m \to G$ ein weiterer Homomorphismus mit $\varphi' \circ i = f$, so folgt wegen der Kommutativität des obigen Diagramms $(\varphi' \circ j_1) \circ i_1 = f|_X = \varphi_1 \circ i_1$ und analog $(\varphi' \circ j_2) \circ i_2 = \varphi_2 \circ i_2$. Nach der Eindeutigkeit von φ_1 und φ_2 in der universellen Eigenschaft der freien Gruppen F_n und F_m folgt daraus $\varphi' \circ j_1 = \varphi_1$ und $\varphi' \circ j_2 = \varphi_2$. Wegen der Eindeutigkeit von φ in der universellen Eigenschaft von $F_n * F_m$ folgt darum $\varphi = \varphi'$.

   Es gibt also genau einen Homomorphismus $\varphi : F_n * F_m \to G$ mit $\varphi \circ i = f$, d.h. $F_n * F_m$ zusammen mit $i : Z \to F_n * F_m$ erfüllt die universelle Eigenschaft der freien Gruppe über Z.

3. (a) Zeige, dass die Abelisierung $F_n/[F_n, F_n]$ von F_n isomorph zu $\mathbb{Z}^n$ ist.

   (b) Folgere daraus, dass $F_n \cong F_m$ genau dann gilt, wenn $n = m$ ist.

   Lösung:

(a) Sei F_n die freie Gruppe mit den Erzeugenden $x_1, \ldots, x_n$, sei $\pi\colon F_n \twoheadrightarrow \bar{F}_n := F_n/[F_n, F_n]$ die kanonische Projektion, und setze $\bar{x}_i := \pi(x_i)$. Wir zeigen, dass $\bar{F}_n$ zusammen mit $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ die universelle Eigenschaft der freien abelschen Gruppe mit n Erzeugenden erfüllt. Da letztere bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt ist, folgt daraus ein Isomorphismus $\bar{F}_n \cong \mathbb{Z}^n$.

Sei also H eine abelsche Gruppe und seien $h_1, \ldots, h_n \in H$. Aufgrund der universellen Eigenschaft von F_n existiert ein Homomorphismus $\varphi\colon F_n \to H$ mit $\varphi(x_i) = h_i$ für alle i. Da H abelsch ist, faktorisiert dieser nach Aufgabe 3 (c) von Serie 3 durch einen Homomorphismus $\bar{\varphi}\colon \bar{F}_n \to H$. Wegen $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$ gilt dann $\bar{\varphi}(\bar{x}_i) = h_i$ für alle i.

Sei $\bar{\varphi}'\colon \bar{F}_n \to H$ ein weiterer Homomorphismus mit $\bar{\varphi}'(\bar{x}_i) = h_i$ für alle i. Dann ist $\varphi' := \bar{\varphi}' \circ \pi\colon F_n \to H$ ein Homomorphismus mit $\varphi'(x_i) = h_i$ für alle i. Nach der Eindeutigkeit in der universellen Eigenschaft von F_n folgt daraus $\varphi' = \varphi$. Aus der Eindeutigkeit der Abelisierung in Aufgabe 3 (c) von Serie 3 folgt daraus weiter $\bar{\varphi}' = \bar{\varphi}$.

Daher ist φ der einzige Homomorphismus $\bar{F}_n \to H$ mit $\varphi(x_i) = h_i$ für alle i, und die universelle Eigenschaft ist gezeigt.

(b) Jeder Isomorphismus $F_n \cong F_m$ induziert einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}^n \;\cong\; F_n/[F_n, F_n] \;\cong\; F_m/[F_m, F_m] \;\cong\; \mathbb{Z}^m.$$

Da der Rang einer abelschen Gruppe nach Aufgabe 6 (a) von Serie 2 unter Isomorphie invariant ist, folgt daraus $\mathrm{Rang}(\mathbb{Z}^n) = \mathrm{Rang}(\mathbb{Z}^m)$. Nach Aufgabe 6 (b) von Serie 2 ist aber $\mathrm{Rang}(\mathbb{Z}^n) = n$ und analog $\mathrm{Rang}(\mathbb{Z}^m) = m$. Also folgt daraus $n = m$, wie zu zeigen war.

*4. Zeige, dass für jedes $n \geqslant 1$ eine Einbettung $F_n \hookrightarrow F_2$ existiert.

Lösung: Sei F_n die freie Gruppe mit den Erzeugenden $x_1, \ldots, x_n$, und sei F_2 die freie Gruppe mit den Erzeugenden a, b. Nach der universellen Eigenschaft von F_n existiert ein Homomorphismus $\varphi\colon F_n \to F_2$ mit $\varphi(x_i) := a^i b a^{-i}$, für $1 \leqslant i \leqslant n$. Wir behaupten, dass φ injektiv ist.

Sei $\alpha \in F_n$. Wir können α als reduziertes Wort $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_k}^{\varepsilon_k}$ schreiben mit $k \geqslant 0$ und $1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant n$ und $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in \{\pm 1\}$. Dann ist

$$\varphi(\alpha) = a^{i_1} b^{\varepsilon_1} a^{i_2 - i_1} b^{\varepsilon_2} a^{i_3 - i_2} \cdots a^{i_k - i_{k-1}} b^{\varepsilon_k} a^{-i_k}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist ein reduziertes Wort, und da F_2 frei über $\{a, b\}$ ist, ist das durch ihn beschriebene Gruppenelement genau dann trivial (also $\alpha \in \mathrm{Kern}(\varphi)$), wenn das Wort Länge 0 hat. Das ist gleichbedeutend mit $k = 0$, also mit $\alpha = 1_{F_n}$. Somit ist $\mathrm{Kern}(\varphi) = 1$ und daher φ injektiv.

5. Ist jede endliche Gruppe isomorph zu einem Quotienten einer endlich erzeugten freien Gruppe mit endlich vielen Relationen?

   Lösung: Ja! Sei G eine Gruppe der Ordnung $n < \infty$ mit den Elementen $g_1, \ldots, g_n$. Sei F_n die freie Gruppe mit den Erzeugenden $x_1, \ldots, x_n$, und betrachte die endliche Menge der Wörter

   $$J \;:=\; \left\{ x_i x_j x_k^{-1} \,\middle|\, 1 \leqslant i, j, k \leqslant n \wedge g_i g_j = g_k \right\}$$

   über dem Alphabet $\{x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}\}$. Die universelle Eigenschaft von F_n liefert einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : F_n \to G$ mit $\varphi(x_i) = g_i$ für alle i, und die Wörter in J induzieren Elemente in Kern(φ). Da dieser Kern ein Normalteiler ist, ist auch die Menge aller F_n-Konjugierten von Elementen in J im Kern. Folglich gilt dasselbe auch für den von all diesen Konjugierten erzeugten Normalteiler $N_J \lhd F_n$. Nach der universellen Eigenschaft der Faktorgruppe faktorisiert φ deshalb durch einen Homomorphismus $\bar{\varphi}\colon F_n/N_J \to G$. Nach Konstruktion ist dieser surjektiv.

   Es bleibt zu zeigen, dass $\bar{\varphi}$ injektiv ist. Dafür genügt es zu zeigen, dass jede Nebenklasse wN_J gleich $x_i N_J$ ist für ein $1 \leqslant i \leqslant n$. Wir beweisen dies durch Induktion über die Länge des Worts w. Ist w das leere Wort, so sei i der Index mit $g_i = 1$. Dann ist $g_i g_i = g_i$ und folglich $x_i x_i x_i^{-1} \in J$. Folglich ist $x_i \in N_J$ und daher $wN_J = N_J = x_i N_J$. Andernfalls ist $w = x_i^{\varepsilon} w'$ für ein kürzeres Wort w'. Nach Induktionsannahme existiert also ein Index j mit $w' N_J = x_j N_J$. Deshalb ist $wN_J = x_i^{\varepsilon} w' N_J = x_i^{\varepsilon} x_j N_J$. Ist $\varepsilon = 1$, so sei k der Index mit $g_i g_j = g_k$. Nach Konstruktion ist dann $x_i x_j x_k^{-1} \in J$ und folglich $wN_J = x_i x_j N_J = x_k N_J$. Ist $\varepsilon = -1$, so sei k der Index mit $g_i^{-1} g_j = g_k$. Dann ist $g_i g_k = g_j$ und nach Konstruktion daher $x_i x_k x_j^{-1} \in J$. Daraus folgt $x_j N_J = x_i x_k N_J$ und damit $wN_J = x_i^{-1} x_j N_J = x_k N_J$.